

KAREKÖK FONKSİYONLAR VE NİTEL ÖZELLİKLERİ

Günlük yaşamda birçok alanda (mühendislik-mimari gibi) yapılan hesaplamalarda karekök fonksiyonu hayatı kolaylaştıran matematiksel bir araçtır.

$f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, $f(x)=\sqrt{x}$ ile modellenen f fonksiyonu karekök referans fonksiyonu olarak adlandırılır.

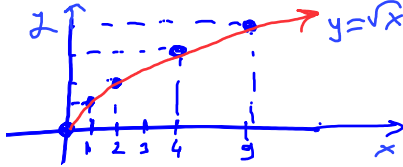
Örnek...1 :

Gerçek sayılarda tanımlı $f(x)=\sqrt{x}$ fonksiyonunun grafiğini

i) aşağıdaki tabloda seçilmiş bazı değerleri bularak çiziniz.

ii) nitel özelliklerini belirtiniz.

x	0	1	2	4	9	16	25	...
y	0	1	$\sqrt{2}$	2	3	4	5	...

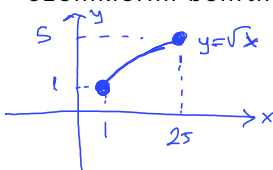


ii)

a) Tanım kümesi	$[0, \infty)$
b) Görüntü kümesi	$[0, \infty)$
c) Sıfırı	$x=0$
d) İşareti	$\frac{x}{\sqrt{x}} \begin{array}{c} -\infty & 0 & +\infty \\ \text{artması} & \emptyset & + \end{array}$
e) Artan/ azalan aralıkları	Artan aralıktır. Grafikte her $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ olduğu görülür. Bu nedenle $f(x)$, $[0, \infty)$ için artandır.
f) Maksimum Minimumu	$[0, \infty)$ tanım kümesinde maksimum yoktur. $(0,0)$ minimum noktası, $y=0$ minimum değeridir.
g) Örtelik	$f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu örtendir. $f(x)=\sqrt{x}$
h) Bire-birlik	Fonksiyon bire-birdir $\forall x_1 \neq x_2 \in [0, \infty) \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ dir.
i) Tekliği-Çiftliği	$f(x) \neq f(-x) \wedge f(x) \neq -f(x)$ olduğundan ne tektir ne çifttir.

Örnek...2 :

$[1,25]$ tanım kümesinde $f(x)=\sqrt{x}$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz. Nitel özelliklerini belirtiniz.



$$f: [1,25] \rightarrow [1,5]$$

f(x) artandır. $1=1$, artan, artan dönüş pozitif, sıfırı olmayan bir fonksiyondur.

$(1,1)$ minimum noktası
 $y=1$ minimum değerdir.
 $(25,5)$ maksimum noktası
 $y=5$ maksimum değerdir

KAREKÖK REFERANS FONKSİYONUNDAN TÜRETİLEN FONKSİYONLAR

$g(x)=a \cdot f(x+r)+k$ biçimindeki fonksiyonları $f(x)=\sqrt{x}$ referans fonksiyonundan çizerken

Adım 1 $y=f(x)$ x eksenini boyunca r birim sola ($r<0$ için |r| birim sağa) ötelenir(kaydırılır).

Adım 2 bir önceki adımda elde edilen fonksiyona a çarpanına göre daraltma genişletme uygulanır

Adım 3 bir önceki adımda elde edilen fonksiyon k birim yukarı ($k<0$ için aşağı) ötelenir (kaydırılır). Burada uygulanacak dönüşümler sırasıyla r,a,k harfleri sırlanmasıyla uygulanır.

Örnek...3 :

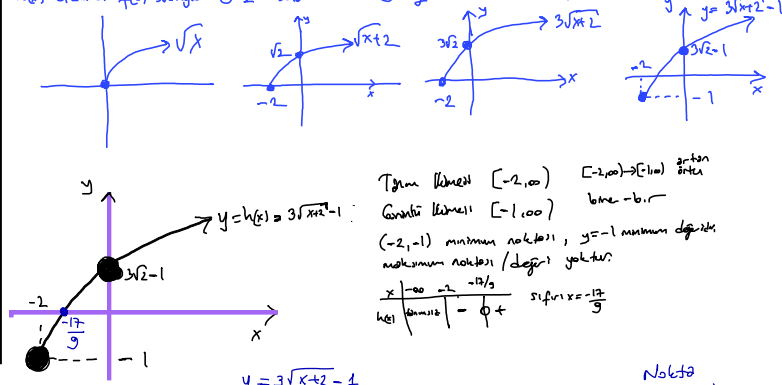
Aşağıdaki fonksiyonların grafiklerini $f(x)=\sqrt{x}$ fonksiyonu grafiğinden ötelemeler yoluyla elde ediniz

	$g(x)=5\sqrt{x}$	$h(x)=3\sqrt{x-2}$	$r(x)=-\sqrt{x}-4$
f(x) türünden ifadesi	$g(x)=5 \cdot f(x)$	$h(x)=3 \cdot f(x-2)$	$r(x)=-f(x)-4$
Yapılacak öteleme/dönüşüm	Referans fonksiyonundaki noktalara x eksenine olan uzaklıklar artır. Grafik x ekseninden uzaklaşarak (dikeyde artarak) çıkar. 5 kat dikey germe	f(x) önce 2 birim sağa ötelenir, sonra elde edilen grafik 3x ekseninden uzaklaşarak (dikeyde artarak) çıkar. x eksenini boyunca pozitif yönde 2 br öteleme 3 kat dikey germe	f(x) önce x eksenine göre kolları. Elde edilen noktalar 4 birim aşağı y eksenine (y eksenine paralel) ötelenir. x ekseninde yansıma y eksenini boyunca negatif yönde 4 br öteleme
Grafik			

Örnek...4 :

$h(x)=3\sqrt{x+2}-1$ fonksiyonunun nitel özelliklerini belirtiniz.

$f(x)=\sqrt{x}$ alınırsa $h(x)=3 \cdot f(x+2)-1$ olur.
 $h(x)$ çizilince $f(x)$ sayıyla 0 2 birim sola ötelenir (dikeyde üstler) (3) 3 kat dikey germe



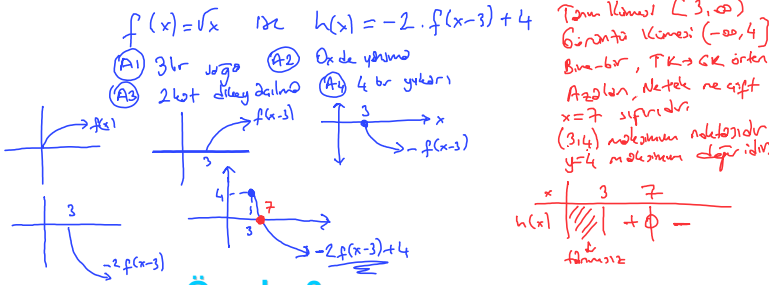
Tanım kümesi $[-2, \infty)$ $[-2, \infty) \rightarrow [-1, \infty)$ artan
 Görüntü kümesi $[-1, \infty)$ birer -b-
 $(-2, -1)$ minimum noktası, $y=-1$ minimum değerdir.
 maksimum noktası (deği) yoktur.
 $\frac{x}{\sqrt{x}} \begin{array}{c} -\infty & 0 & +\infty \\ \text{artması} & \emptyset & + \end{array}$ sıfırı $x=-\frac{17}{9}$

y eksenini kesim noktası için $x=0$ verilir. $x=0 \Rightarrow y=3\sqrt{0+2}-1=3\sqrt{2}-1 \Rightarrow (0, 3\sqrt{2}-1)$
 x eksenini kesim noktası (yani fonksiyonun sıfırı için) $y=0$ verilir. $0=3\sqrt{x+2}-1 \Rightarrow 3\sqrt{x+2}=1 \Rightarrow \sqrt{x+2}=\frac{1}{3} \Rightarrow x+2=\frac{1}{9} \Rightarrow x=-\frac{17}{9}$ Noktası $(-\frac{17}{9}, 0)$

x eksenini boyunca 3 birim negatif yönde öteleme, 2 kat dikey germe, x ekseninde yansıma ve y eksenini boyunca 4 birim pozitif yönde öteleme

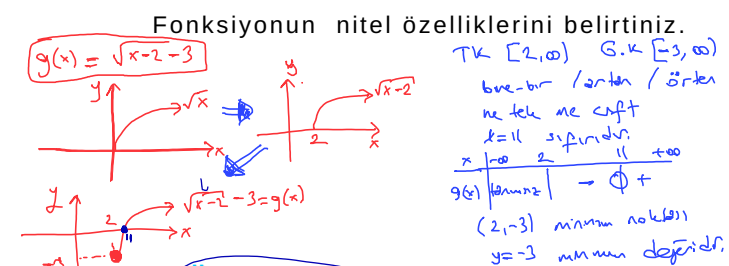
Örnek...5 :

$h(x) = -2\sqrt{x-3} + 4$ fonksiyonun grafiğini çiziniz. Bu fonksiyonun nitel özelliklerini belirtiniz.



Örnek...6 :

Karekök referans fonksiyonunun y eksenini boyunca negatif yönde 3 birim, x eksenini boyunca pozitif yönde 2 birim ötelenmesiyle elde edilecek fonksiyonun cebirsel ifadesini bulunuz. Bu fonksiyonun grafiğini çiziniz.



Örnek...7 :

Bir $g(x)$ fonksiyonu elde edilirken karekök referans fonksiyonunun cebirsel temsilinde bağımsız değişkeninin 2 fazlasının aldığı değeri kareköküne 5 ekleme yapıldığı biliniyor. Buna göre, $g(x)$ fonksiyonunun cebirsel ifadesini bulunuz.

$x \rightarrow x+2 \rightarrow \sqrt{x+2} + 5 \quad g(x) = \sqrt{x+2} + 5$

karekök referans fonksiyonunun kuralını ve gerekmesi durumunda grafiğini hatırlamanız şarttır.

Örnek...8 :

Bir $g(x)$ fonksiyonu elde edilirken, karekök referans fonksiyonunun grafiğindeki noktaların x eksenine olan uzaklıklarının 3 kat arttığı görülmektedir. Buna göre, $g(x)$ fonksiyonunun cebirsel ifadesini bulunuz.

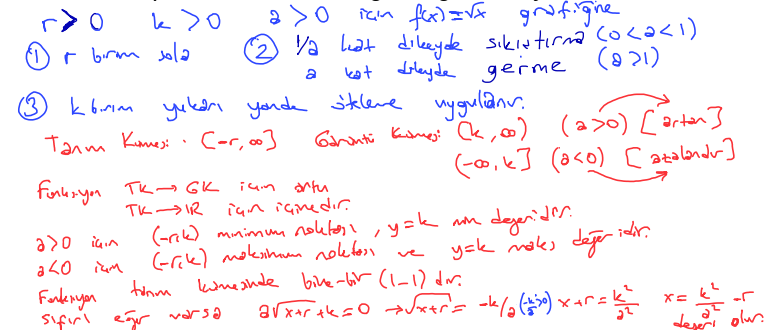
$x \rightarrow \sqrt{x} \rightarrow \sqrt{x} + 3\sqrt{x} = 4\sqrt{x}$

$g(x) = 4\sqrt{x}$ (Not 3 kat olmuyor 3 kat artırıyor yani 4 katına çıkıyor)

soruda özet olarak 4 kat dikey germe yapılmıştır.

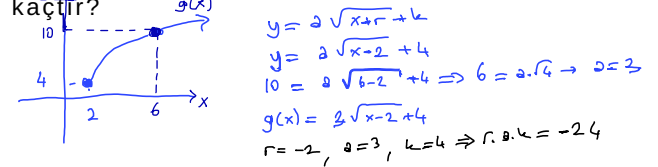
Örnek...9 :

$f(x) = \sqrt{x}$ fonksiyonundan türetilen $g(x) = a\sqrt{x+r} + k$ ($a, k, r \in \mathbb{R}, a \neq 0$) kareköklü fonksiyonların nitel özelliklerini a, r, k parametrelerine göre genelleyiniz.



Örnek...10 :

$g(x) = a \cdot f(x+r) + k$ fonksiyonu karekök referans fonksiyonundan elde edilmiştir. Bu fonksiyonun minimum noktası (2, 4) ve (6, 10) noktasından geçmektedir. Buna göre r, a, k kaçtır?



Örnek...11 :

Karekök referans fonksiyonunun üzerindeki y değerlerini 3 katı ile eşleştirilmiş, sonra elde edilen noktalara x eksenine göre yansıma dönüşümü uygulanmış, sonrada sırasıyla elde edilen noktalar x eksenini boyunca pozitif yönde 1 birim, y eksenini boyunca pozitif yönde 2 birim ötelenmiştir. Elde edilecek fonksiyonun cebirsel ifadesini bulunuz.

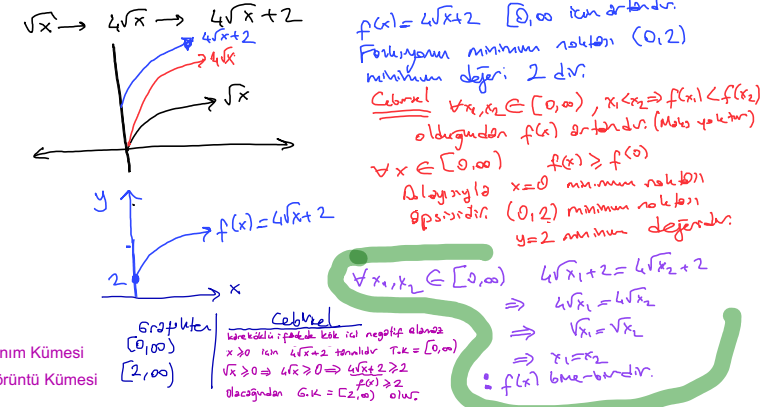
$\sqrt{x} \rightarrow 3\sqrt{x} \rightarrow -3\sqrt{x} \rightarrow -3\sqrt{x-1} \rightarrow -3\sqrt{x-1} + 2$

$g(x) = -3\sqrt{x-1} + 2$

Örnek...12 :

4 kat dikey germe ve y eksenini boyunca pozitif yönde 2 birim öteleme yapılarak grafik çizilir

$f(x) = 4\sqrt{x} + 2$ fonksiyonun artan azalan olduğu aralıkları bulup eğer varsa minimum maksimum değerlerini belirtiniz. (Cebirsel ve grafikler üzerinden inceleyiniz.)

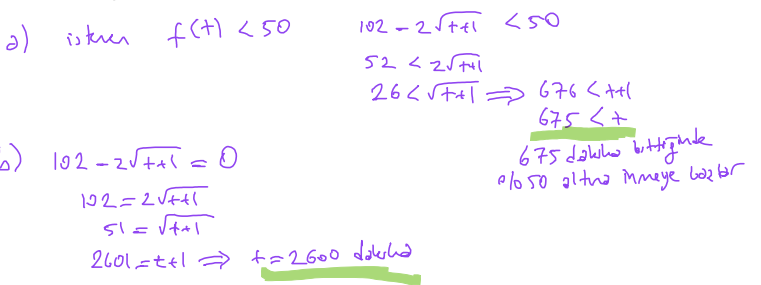


Örnek...13 :

Bir drone un havada kaldığı süreye (t) göre bataryasının doluluk yüzdesi $f(t)$

$f(t) = 102 - 2\sqrt{t+1}$ olmak üzere fonksiyonu ile modellenmiştir. Buna göre

- havadaki hareket başladıktan kaç dakika sonra batarya doluluğu yüzde 50'nin altına düşer.
- Drone un Havada kalabileceği en uzun süre kaç dakikadır?



www.matbaz.com