GERÇEK SAYILARDA TANIMLI KARESEL FONKSİYONLAR

Karesel fonksiyonlar, günlük yaşamda birçok durumu modellemek için kullanılabilir. Fizikte serbest düşen bir cismin hareketi, ekonomide maksimum kâr ya da minimum maliyet analizleri veya mühendislikte atış hareketi problemleri karesel fonksiyonlara örnektir.

> Gerçek sayılarda $f(x)=x^2$ fonksiyonuna ikinci dereceden bir değişkenli karesel fonksiyon denir.
> Bu fonksiyonun belirttiği eğriye (grafiğine) de **parabol** denir.

Örnek...1 :

Gerçek sayılarda tanımlı karesel referans fonksiyonu K(2,p) noktasından geçiyorsa p kaçtır?

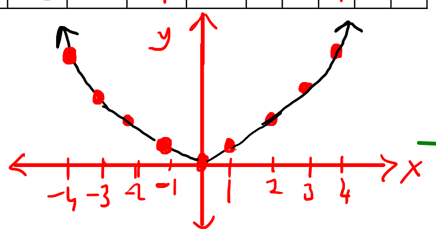
Bir nokta ait olduğu fonksiyon (eğri) denklemini sağlamalıdır.

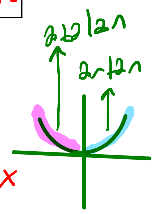
$f(2)=p \Rightarrow 2^2=p \Rightarrow p=4$

Örnek...2 :

Karesel referans fonksiyonunun grafiğini, cebirsel temsili $y=f(x)=x^2$ ve aşağıdaki tablodan faydalanarak çiziniz. Nitel özelliklerini belirtiniz.

x	– 4	– 3	– 2	– 1	0	1	2	3	4
f(x)	16	9	4	1	0	1	4	9	16





Not: A kümesinden A kümesine tanımlanmış bir fonksiyona kısaca "A'da bir fonksiyon" denir.

Tanım kümesi : R Görüntü Kümesi: [0,oo)
Sıfırı: x=0
Artan olduğu bölge : [0,oo) Azalan olduğu bölge : [-oo,0)
Maksimum değer:Yok Minimum değer y=0
Minimum noktası (0,0)
Fonksiyon tanım kümesi R'de Bire-bir değildir.
Fonksiyonun değer kümesi R alınırsa örten değildir
değer kümesi [0,oo) alınırsa örtendir.
Fonksiyon R de tek fonksiyondur. x=0 doğrusu simetri eksenidir

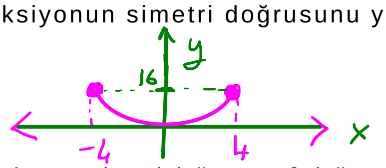
işaret tablosu

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f(x)		+	ϕ	+	

işaret tabloları 6. bölümde daha detaylı incelenmiştir.

Örnek...3 :

f: [–4 , 4] → R, $f(x) = x^2$ şeklinde tanımlı karesel fonksiyonunun grafiğini çiziniz, nitel özelliklerini belirtiniz. Grafiğe göre, fonksiyonun simetri doğrusunu yazınız.



fonksiyonun simetri doğrusu x=0 doğrusudur (başka bir deyişle y eksenidir). Bu sebeple f(x) çift fonksiyondur. burada tanım kümesinin simetrik (-a,a) ya da [-a,a] türünde olması da şarttır

Tanım Kümesi	[-4,4]
Değer Kümesi	R
Görüntü Kümesi	[0,16]
Fonksiyon Sıfırları	x=0
Pozitif Olduğu Aralıklar	[-4,4]-{0}
Negatif Olduğu Aralıklar	yoktur
Artan Olduğu Aralıklar	[0,4]
Azalan Olduğu Aralıklar	[-4,0]
Maksimum Noktası	yoktur
Minimum Noktası	Nokta (0,0) , değer 0 dır
Bire Bir Olma Durumu	birebir değildir. yatay çizgiler çizilirse birden fazla grafiği keser
Örtenliği	değer kümesi R için örten değildir
Tek çift olma durumu	çifttir.
İşaret Tablosu	x: -4, 0, 4; f(x): + ϕ + ; tanımsız

grafik x eksenin üzerindeyse +, altındaysa -

Örnek...4 :

f: [a , b]→ [4,25],
$f(x) = (k+2)x^3+ x^2+(m+1)x+m+k+p$ şeklinde verilen fonksiyon tanımlandığı aralıkta birebir ve azalan karesel referans fonksiyonudur. Buna göre a + b+k+m+p toplamının kaça eşittir?

Fonksiyonun cebirsel ifadesi $f(x)=x^2$ olmalıdır.
4 ve 25 değerlerini sırasıyla ±2 ve ±5 için alması olmalıdır. birebir ve azalan olacaksa [-5,-2] tanım kümesi olmalıdır,

$a=-5 \quad b=-2$

$k+2=0 \quad m+1=0 \quad m+k+p=0$

$k=-2 \quad m=-1 \quad p=3$

$a+b+\underbrace{k+m+p}_{0} = -5+(-2)+0=-7$

tanım kümesine bakmadan her karesel fonksiyon bire-bir değildir demek hatalıdır!!!

KARESEL REFERANS FONKSİYONUNDAN TÜRETİLEN FONKSİYONLAR

Gerçek sayılarda verilen $f(x)=x^2$ fonksiyonundan elde edilen $g(x) = a\cdot f(x \pm r) \pm k$ fonksiyonlarına karesel referans fonksiyonundan türetilmiş fonksiyon denir.

ÖTELEMELERLE REFERANS FONKSİYONU KULLANMAK

a, r>0, k>0 ∈R ve $a \neq 0$ olmak üzere $f(x) = x^2$ karesel referans fonksiyonundan türetilen $g(x) = a(x - r)^2+k$ fonksiyonun grafiği çizilirken şu adımlar uygulanır:

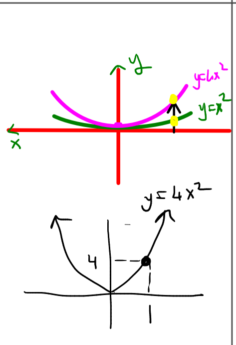
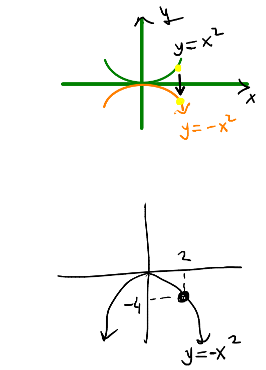
1. adım : $f(x) = x^2$ referans fonksiyonu x ekseni boyunca pozitif yönde r birim ötelenerek (sağa doğru) $h(x) = (x- r)^2$ fonksiyonu çizilir.

2. adım : $h(x) = (x - r)^2$ fonksiyonunun değerlerini a katına eşleyen $k(x) = a (x- r)^2$ fonksiyonu çizilir.

3. adım : $k(x) = a(x - r)^2$ fonksiyonu y ekseni boyunca pozitif yönde k birim ötelenerek $g(x) = a (x- r)^2 + k$ fonksiyonu çizilir.

Örnek...5 :

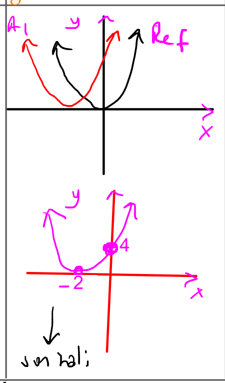
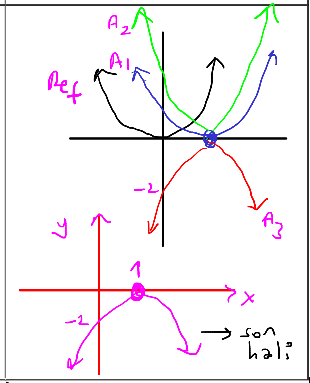
$f(x)=x^2$ karesel fonksiyonunu referans fonksiyonu olarak alıp grafik temsiline uygulanan dönüşümü belirleyerek istenilen grafikleri çiziniz.

	$y=4\cdot f(x)=4x^2$	$y=- f(x)=- x^2$
Uygulanacak dönüşüm	grafik üzerindeki noktalar x ekseninden uzaklaşacak şekilde dikey eksende genişler. mesafeler 4 kat olmuştur (y eksenine paralel uzatılmışı elde edilir)	grafik üzerindeki noktaların x eksenine göre simetrikleri elde edilir
Grafik	 önceden x eksenine 1 birim olan mesafe 4 olmuştur.	
Karesel Referans Fonksiyonunun Cebirsel Temsiline Göre Yapılan Cebirsel İşlem →	referans fonksiyon 4 ile çarpılmıştır, ya da her bir bağımsız değişkene karşılık gelen değer 4 ile çarpılmıştır	-1 ile çarpma ya da her bir bağımsız değişkene karşılık gelen değeri -1 ile çarpma
Uygulanan dönüşüm →	4 kat dikey germe	x eksenine göre yansıma,

Tablo altındaki açıklamalar M.E.B ders kitabına göredir

Örnek...6 :

$f(x)=x^2$ karesel fonksiyonunu referans fonksiyonu alarak tabloda verilen grafikleri adımlarını açıklayarak çiziniz.

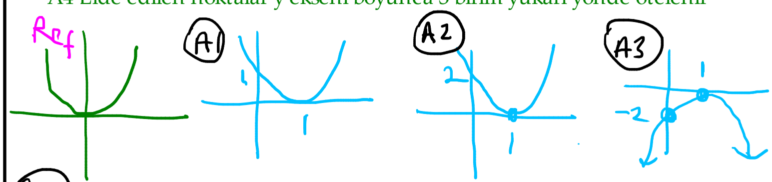
	$y=f(x+2)=(x+2)^2$	$y=-2.f(x- 1)=-2(x- 1)^2$
Uygulanacak dönüşüm	f(x) grafiği x ekseni boyunca 2 birim sola kaydırılır (ötelenir) adımları A1 A2 şeklinde yazıp gösterelim	f(x) grafiği önce 1 birim sağa kaydırılır sonra elde edilen noktalar x ekseninden 2 kat uzaklaşacak şekilde grafik açılır. Son olarak da elde edilen noktaların x eksenine göre simetriği alınır.
Grafik		
	x ekseni boyunca negatif yönde 2 birim öteleme	x ekseni boyunca pozitif yönde 1 birim öteleme 2 kat dikey germe, x eksenine göre yansıma

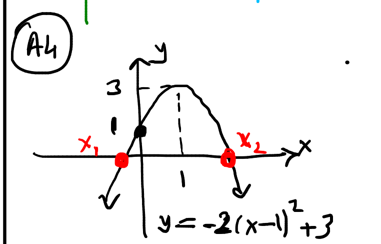
Tablo altındaki açıklamalar M.E.B ders kitabına göredir

Örnek...7 :

$f(x)=x^2$ karesel fonksiyonunu referans fonksiyonu olarak alıp $y=-2.f(x- 1)+3=- 2(x- 1)^2+3$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz. Nitel özelliklerini belirtiniz.

y=f(x) üzerindeki noktalara sırasıyla aşağıdaki dönüşümler uygulanır.
A1. Noktalar x ekseni boyunca 1 birim pozitif yönde ötelenir
A2 Grafik x ekseninden 2 kat uzaklaşır (dikeyde açılır) dikey germe
A3 Elde edilen grafikteki noktaların x eksenine göre yansıması alınır.
A4 Elde edilen noktalar y ekseni boyunca 3 birim yukarı yönde ötelenir





x_1 ve x_2 için ← yeni fonksiyonun sıfırları için denklemi çözmek gerkir

$-2(x-1)^2+3=0$

$(x-1)^2=3/2$

$x_1=-\sqrt{3/2}+1$ $\quad x_2=\sqrt{\frac{3}{2}}+1$

Tanım kümesi : R Görüntü Kümesi: (-oo,3]
Sıfırı: x= x1 ve x=x2
Artan olduğu bölge :(-oo,1] Azalan olduğu bölge : [1,oo)
Maksimum değer: 3 Minimum değer Yok
Maksimum noktası (1,3) (bu noktanın ismi tepe noktasıdır)
Fonksiyon tanım kümesi R'de Bire-bir değildir.
Fonksiyonun değer kümesi R alınırsa örten değildir
değer kümesi (-oo,3] alınırsa örtendir.
Fonksiyon R de tek yada çift fonksiyon değildir.
x=1 doğrusu fonksiyonun simetri eksenidir.

y=–2. f (x– 1)+3 ifadesiyle belirlenen fonksiyon için UYGULANAN DONUŞUM ÖZETLE x ekseni boyunca pozitif yönde 1 birim öteleme, 2kat dikey germe, x eksenine göre yansıma , y ekseni boyunca pozitif yönde 3 birim ötelemedir
Tüm bağımsız değişkenlerden 1 çıkarılmış ve elde edilen sonuç -2 ile çarpılmış ve son işlem sonucuna 3 eklenmiştir

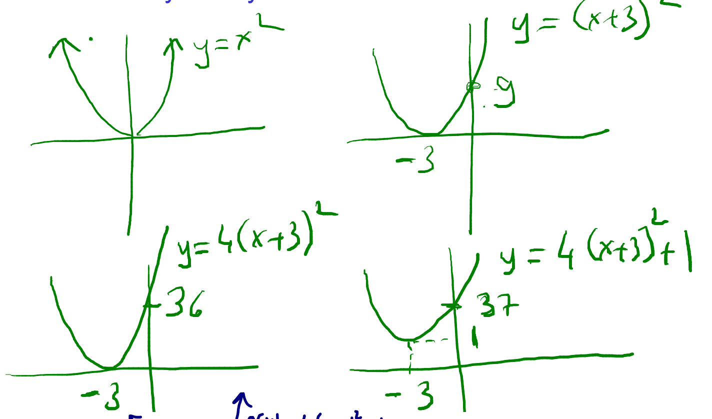
Örnek...8 :

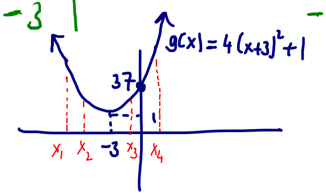
$f(x)=x^2$ karesel fonksiyonunu referans fonksiyonu olarak alıp
a) $g(x)= 4(x+3)^2+1$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

b) Tanım ve görüntü kümelerini bulunuz.

c) Artan-azalan olduğu aralıkları belirleyip eğer varsa minimum maksimum değerlerini hesaplayınız. (İşlemlerinizi hem cebirsel hemde geometrik yönlerden inceleyerek yapınız)

g(x) fonksiyonu çizilirken f(x) fonksiyonunun grafiği
A1 3 birim x ekseni doğrultusunda sola ötelenir
A2 x ekseninden uzaklaşacak şekilde grafik dikey doğrultuda açılır/genişler (x eksenine mesafler dört katına çıkar) başka bir deyişle **4 kat dikey germe**
A3 Elde edilen noktalar/grafik y ekseni doğrultusunda bir birim yukarı yönde ötelenir.





Grafik incelendiğinde g fonksiyonunun tüm gerçek sayılar için tanımlı olduğu görülmektedir. Tanım kümesi R dir.
Görüntü kümesi [1,∞) dur.
$\forall x\in(-\infty,-3]$ ve $x_1 < x_2$ için $g(x_1) > g(x_2)$ olduğundan $(-\infty,-3]$ aralığında g azalandır.
$\forall x\in[-3,\infty)$ ve $x_3 < x_4$ için $g(x_3) < g(x_4)$ olduğundan $[-3,\infty)$ aralığında g artandır.

Grafik incelendiğinde g fonksiyonu $x = -3$ noktasında minimum değerini aldığı görülmektedir. Fonksiyonun minimum değeri 1'dir. Minimum noktası (−3,1) dir.
Maksimum değeri yoktur.

Yine grafik incelenirse Maksimum değeri yoktur.

CEBİRSEL

$f(x)=x^2$ karesel referans fonksiyonu R de tanımlıdır.
$g(x) =4f(x+3)+1=4(x+3)^2+1$ olduğu için g fonksiyonun da tanım kümesi R olur.

$g(x) =4f(x+3)+1=4(x+3)^2+1$ olduğu için g fonksiyonun da görüntü kümesi [1, ∞) olur. Şöyle ki :

$\forall x\in\mathbb{R}, (x+3)^2\geq 0 \Rightarrow 4.(x+3)^2\geq 0\Rightarrow 4.(x+3)^2+1\geq 1$

Buradan hem görüntü kümesinin [1,oo) kümesi olduğunu hem de minimum değerin 1 ve minimum noktasının (-3,1) olduğunu, (sonucun 1 çıkması x=−3 olması ile mümkündür) elde ederiz.

$\forall x\in(-\infty,-3]$ ve $x_1 < x_2$ için $g(x_1) > g(x_2)$ olduğu gösterelim (yani bu aralıkta azalan olduğunu gösterelim)

$\forall x_1<x_2\leq -3\Rightarrow x_1+3<x_2+3\leq 0\Rightarrow (x_1+3)^2>(x_2+3)^2$
$\Rightarrow 4.(x_1+3)^2>4.(x_2+3)^2\Rightarrow 4.(x_1+3)^2+1>4.(x_2+3)^2+1\Rightarrow g(x_1)>g(x_2)$

yani özetle $\forall x_1<x_2\leq -3\Rightarrow g(x_1)>g(x_2)$ elde edildiğinden $(-\infty,-3]$ aralığında g azalandır.

$\forall x\in[-3,\infty)$ ve $x_3 < x_4$ için $g(x_3) < g(x_4)$ olduğu gösterelim (yani bu aralıkta artan olduğunu gösterelim)

$\forall x_3,x_4 : -3\leq x_3<x_4\Rightarrow 0\leq x_3+3<x_4+3\Rightarrow (x_3+3)^2<(x_4+3)^2$
$\Rightarrow 4.(x_3+3)^2<4.(x_4+3)^2\Rightarrow 4.(x_3+3)^2+1<4.(x_4+3)^2+1\Rightarrow g(x_3)<g(x_4)$

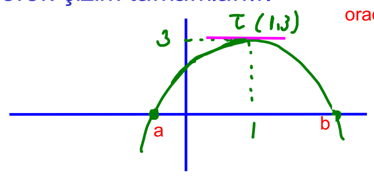
yani özetle $\forall x_3,x_4 : -3\leq x_3<x_4\Rightarrow g(x_3)<g(x_4)$ elde edildiğinden $[-3,\infty)$ aralığında g artandır.

Örnek...9 :

$f(x)=x^2$ karesel fonksiyonunu referans fonksiyonu olarak alıp
$y=-2.f(x-1)+3=-2(x-1)^2+3$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz. Nitel özelliklerini belirtiniz.

grafik çizilirken y=f(x) referans fonksiyonu önce 1 birim sağa ötelenir. sonra dikeyde 2 kat açılır. sonra x eksenine göre simetrik alınır. son olarak da 3 birim yukarı yönde ötelenerek çizim tamamlanır.

örnek 7 de yapmıştık, nitel özelliklere oradan bakabilirsiniz



a ve b fonksiyonun sıfırları olsun

Grafik incelendiğinde k(x) fonksiyonunun tüm gerçek sayılar için tanımlı olduğu görülmektedir. Tanım kümesi R dir.
Görüntü kümesi (−∞,3] dır.
$\forall x\in(-\infty,1]$ ve $x_1 < x_2$ için $k(x_1) < k(x_2)$ olduğundan $(-\infty,1]$ aralığında k artandır.
$\forall x\in[1,\infty)$ ve $x_3 < x_4$ için $k(x_3) > k(x_4)$ olduğundan $[1,\infty)$ aralığında k azalandır.

Grafik incelendiğinde k fonksiyonu $x = 1$ noktasında maksimum değerini aldığı görülmektedir. Fonksiyonun maksimum değeri 3 olur. Maksimum noktası (1,3) dir.
Minimum değeri yoktur.

CEBİRSEL

$f(x)=x^2$ karesel referans fonksiyonu R de tanımlıdır.
$k(x) =-2f(x-1)+3=-2(x-1)^2+3$ olduğu için k fonksiyonun da tanım kümesi R olur.

$k(x) =-2f(x-1)+3=-2(x-1)^2+3$ olduğu için k fonksiyonun görüntü kümesi (−∞,3] olur. Şöyle ki :

$\forall x\in\mathbb{R}, (x-1)^2\geq 0\Rightarrow -2.(x-1)^2\leq 0\Rightarrow -2.(x-1)^2+3\leq 3$

Buradan hem görüntü kümesinin (−∞,3] kümesi olduğunu hem de maksimum değerinin 3 ve maksimum noktasının (1,3) olduğunu, (sonucun 3 çıkması x=1 olması ile mümkündür) elde ederiz.

$\forall x\in(-\infty,1]$ ve $x_1 < x_2$ için $k(x_1) < k(x_2)$ olduğu gösterelim (yani bu aralıkta azalan olduğunu gösterelim)

$\forall x_1<x_2\leq 1\Rightarrow x_1-1<x_2-1\leq 0\Rightarrow (x_1-1)^2>(x_2-1)^2$
$\Rightarrow -2(x_1-1)^2<-2(x_2-1)^2\Rightarrow -2(x_1-1)^2+3<-2(x_2-1)^2+3\Rightarrow k(x_1)<k(x_2)$

yani özetle $\forall x_1<x_2\leq 1\Rightarrow k(x_1)<k(x_2)$ elde edildiğinden $(-\infty,1]$ aralığında k artandır.

$\forall x\in[1,\infty)$ ve $x_3 < x_4$ için $k(x_3) > k(x_4)$ olduğu gösterelim (yani bu aralıkta artan olduğunu gösterelim)

$\forall x_3,x_4 : 1\leq x_3<x_4\Rightarrow 0\leq x_3-1<x_4-1\Rightarrow (x_3-1)^2<(x_4-1)^2$
$\Rightarrow -2.(x_3-1)^2>-2.(x_3-1)^2\Rightarrow -2.(x_3-1)^2+3>-2.(x_3-1)^2+3\Rightarrow k(x_3)>k(x_4)$

yani özetle $\forall x_3,x_4 : 1\leq x_3<x_4\Rightarrow k(x_3)>k(x_4)$ elde edildiğinden $[1,\infty)$ aralığında k azalandır.

fonksiyonun işaret tablosu için sıfırlarını bulalım ve tabloya yerleştirelim.

x		x_1		x_2	+
f(x)	−	0	+	0	−

$x_1 = 1-\sqrt{\frac{3}{2}}$ $\quad x_2 = 1+\sqrt{\frac{3}{2}}$

$-1(x-1)^2+3=0$
$2(x-1)^2=3$
$(x-1)^2=3/2$
$|x-1|=\sqrt{3/2}$
$x_1 = 1+\sqrt{3/2}$
$x_2 = 1-\sqrt{3/2}$

işaret tabloları ve eşitsizlikler temanın 6. ve son bölümünde detaylı incelenmiştir

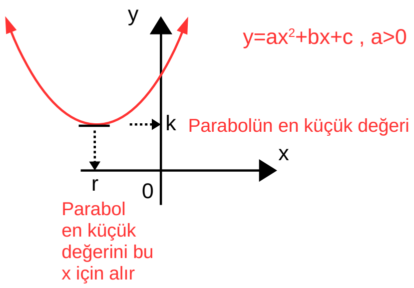
KARESEL FONKSİYONLARIN TAM KARE FORMUNA DÖNÜŞTÜRÜLMESİ

a, r, k, b ve c birer gerçek sayı, $a \neq 0$ olmak üzere $f(x) = a(x + r)^2 + k$ şeklinde tam kareli formu verilen fonksiyonların genel denklemi f: R → R, $f(x) = ax^2 + bx + c$ dir.

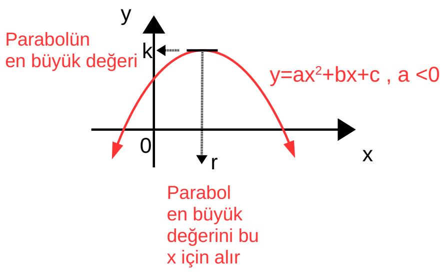
Uyarı

Bir parabolün grafiği başkatsayı olan a sayısına bağlı olarak iki şekilde olabilir.

a>0 için kollar yukarı ve parabol bir en küçük değere (minimum) sahip,



a<0 için kollar aşağı ve parabol bir en büyük değere (maksimum) sahiptir



Her iki durumda da elde edilen ekstremum (yani en küçük veya en büyük değer) tepe noktası denilen noktada elde edilir.(Tanım kümesi tüm reel sayılar)

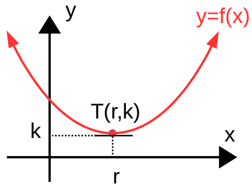
Tepe noktası, apsisi $x=r=\frac{-b}{2a}$ olan $T(r,f(r))$ olan noktasıdır.

x=r doğrusuna **simetri ekseni** de denir.

Burada f(r) değeri a>0 için parabolde x'e verilebilecek tüm değerler için en küçük görüntü değeridir. (benzer şekide a<0 en büyük görüntü değeridir.)

$f(x)=ax^2+bx+c$ ise $f(x)=a(x^2+\frac{b}{a}x)+c$ ve $\frac{b^2}{4a^2}$ terimini ekleyip çıkararak verilen $f(x)=ax^2+bx+c=a(x+r)^2+k$ tam kare formuna tamamlanmış olur.

Şekildeki parabolün denklemi $y=f(x)=a(x-r)^2+k$ olarak ifade edilebilir.



Örnek...10 :

$f(x) = x^2 + 6x + 11$ tam kare formatına tamamlanmıştır, inceleyiniz.

$f(x) = x^2 + 6x + 9 - 9 + 11$ (x li terimin yarısı eklendi ve çıkarıldı)
$f(x) = (x + 3)^2 - 9+11$ $f(x) = (x + 3)^2 + 2$ istenilen formattadır. Parabolün simetri ekseni x=-3 doğrusudur.

Örnek...11 :

$f(x) = 2x^2 + 16x + 7$ tam kare formatına tamamlanmıştır, inceleyiniz.

$f(x) = 2(x^2 + 8x) + 7$
$f(x) = 2(x^2 + 8x+16-16)^2 + 7$
(x li terimin yarısı eklendi ve çıkarıldı)
$f(x) = 2[(x + 4)^2-16] +2= 2(x + 4)^2-30$
istenilen formattadır. Parabolün simetri ekseni x=-4 doğrusudur.

Örnek...12 :

Gerçek sayılarda verilen fonksiyonları tam kareye tamamlayınız.

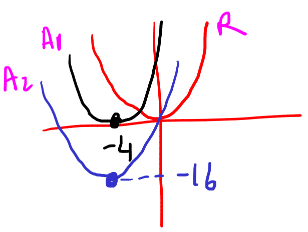
$f(x)=x^2 - 4x$	$\boxed{(x-2)^2-4}$
$f(x)=x^2 +12x-8$	$(x+6)^2-36-8 = \boxed{(x+6)^2-44}$
$f(x)=2x^2 - 24x+5$	$2(x^2-12x)+5=2[(x-6)^2-36]+5$ $\boxed{2(x-6)^2-67}$
$f(x)=2x^2 - 6x+1$	$2(x^2-3x)+1 = 2[(x-\frac{3}{2})^2-\frac{9}{4}]+1$ $\boxed{2(x-\frac{3}{2})^2-7/2}$

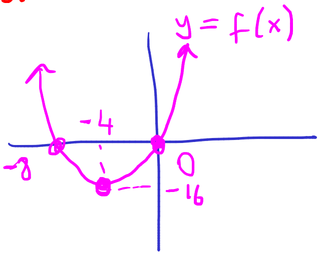
Örnek...13 :

Gerçek sayılarda cebirsel temsili $f(x)=x^2+8x$ olarak verilen karesel fonksiyonunu
a) tam kareye tamamlayınız.
b) grafiğini karesel referans fonksiyonuna yapılan dönüşümlerden faydalanarak çiziniz.
c) Nitel özelliklerini belirtiniz.
d) işaret tablosunu yapınız

a) $f(x) = x^2+8x = (x+4)^2-16$

b) $g(x)=x^2$ grafiği 4 birim sola, 16 birim aşağı ötelenir.





Tanım kümesi : R Görüntü Kümesi: [-16,oo)
Sıfırı: x= -8 ve x=0
Artan olduğu bölge : [-4,oo) Azalan olduğu bölge : (-oo,-4]
Maksimum değer: yok Minimum değer -16
Minimum noktası (-4,-16)
Fonksiyon tanım kümesi R'de Bire-bir değildir.
Fonksiyonun değer kümesi R alınırsa örten değildir
değer kümesi [-16,oo] alınırsa örtendir.
Fonksiyon R de tek yada çift fonksiyon değildir.
Simetri ekseni x=-4 doğrusudur.

Örnek...14 :

$f(x) = x^2-2x$ fonksiyonunun aşağıda verilen tanım aralıklarında görüntü kümelerini bulunuz.
a) $x \geq 1$
b) $-4 \leq x < 0$
c) $-3 \leq x \leq 5$

$y=f(x) = x^2-2x = (x-1)^2-1$

a) $x \geq 1 \Rightarrow$ $(x-1) \geq 0$ $(x-1)^2 \geq 0$

$(x-1)^2-1 \geq -1$

Görüntü Kümesi $[-1,\infty)$

b) $-4 \leq x < 0 \Rightarrow$ $-5 \leq x-1 < -1$

$1 < (x-1)^2 \leq 25$ $0 < (x-1)^2-1 \leq 24$

G.K. $= (0,24]$

c) $-3 \leq x \leq 5 \Rightarrow$ $-4 \leq x-1 \leq 4$ $0 \leq (x-1)^2 \leq 16$

$-1 \leq (x-1)^2-1 \leq 15 \Rightarrow$ G.K $= [-1,15]$

Örnek...15 :

g fonksiyonu, karesel referans fonksiyonunun grafik temsilinin x ekseni boyunca pozitif yönde 5 birim, y ekseni boyunca negatif yönde 2 birim ötelenmesi sonucu elde edilen noktayla eşlemektedir. Buna göre, g fonksiyonunun cebirsel temsilini yazınız.

$x \to x-5$ $y \to y-2$

$g(x) = (x-5)^2-2$

Örnek...16 :

Bir balonun içini doldurabilecek hava hacmi (V) basınç (x) cinsinden $V(x)=20x-x^2$ denklemi ile veriliyor.
Buna göre , bu balonun hacmi en çok kaç br^3 olur?

$a=-1$ $b=20$ $c=0$

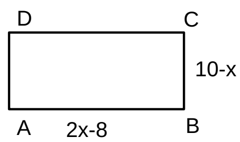
istenen V_{maks}

$r = -\frac{b}{2a} = \frac{-20}{-2} = 10$

$k = f(r) = V_{maks} = f(10) = 20.10-10^2$
$= 200-100$
$= 100$

Örnek...17 :

Şekilde bir kenarı 2x−8, diğer kenarı 10−x olan dikdörtgen veriliyor. Bu dikdörtgenin alanı en çok kaç birim karedir?



$A(x) = (10-x)(2x-8) = 20x-80-2x^2+8x$
$= -2x^2+28x-80$

$a=-2$ $b=28$ $c=-80$

$r = -\frac{b}{2a} = \frac{-28}{-4} = 7$

$A_{max} = A(7) = -2.7^2+28.7-80$
$= 18$

Örnek...18 :

Türk lirası olarak x alış ve y satış fiyatına sahip bir malın satış ve alış fiyatı arasında $y=13x-x^2-20$ bağıntısı vardır. Bu alışverişte kar en fazla kaç TL olur?

kâr = satış − maliyet = $k(x)$

$k(x) = 13x - x^2 - 20 - x = -x^2 + 12x - 20$

$a = -1 \quad b = 12 \quad c = -20$

$r = \frac{-b}{2a} = \frac{-12}{-2} = 6$

$k_{max} = k(6) = -36 + 72 - 20 = 16$

Örnek...19 :

Müşterilerine internet erişimi sağlayan bir telekom şirketi belirli bir paketi aylık 600 ₺ 'den satmaktadır. Şirket, fiyat artışının müşteri sayısını nasıl etkilediğini anlamak ve toplam gelirini maksimuma çıkaracak fiyatı belirlemek istemektedir. Yapılan bir pazar araştırmasına göre internet paketinin fiyatı her 40 ₺ artırıldığında hizmeti satın alan müşteri sayısı 40 kişi azalmakta, paketin fiyatı her 40 ₺ azaltıldığında ise müşteri sayısı 40 kişi artmaktadır.
Şirket sahibi bu paketi şu anda 600 ₺'den 1000 kişiye satmaktadır.

a) x her bir 40 ₺'lik fiyat artışını ifade etmek üzere müşteri sayısını ve paketin yeni fiyatını cebirsel olarak ifade ediniz.

b) Elde ettiğiniz cebirsel ifadelerle şirket sahibinin bu kahveden elde edeceği gelir fonksiyonunu (isim olarak g(x) diyelim) modelleyip , elde edilebilecek maksimum geliri bulunuz.

a) yeni paket fiyatı $600 + 40.x$

yeni müşteri sayısı $1000 - 40x$

b) gelir = $(600 + 40x).(1000 - 40x)$

$600000 - 24000x + 40000x - 1600x^2$

$-1600x^2 + 16000x + 600000$

$G(x) = -1600x^2 + 16000x + 600000$

$r = \frac{-16000}{-3200} = 5$

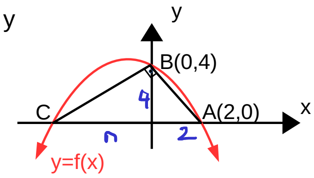
$G_{max} = G(5) = (600 + 40.5).(1000 - 40.5)$

$= 800 . 800$

$= 640000$ ₺

Örnek...20 :

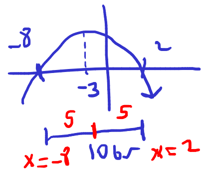
Şekildeki parabol x eksenini A(2,0) ve C, y eksenini ise B(0,4) noktalarında kesiyor. ABC dik üçgendir. Fonksiyonun görüntü kümesindeki en büyük sayıyı bulunuz?



Öklid $4^2 = n.2 \rightarrow n = 8$

denklem $a(x+8)(x-2) = y$

$f(0) = 4$



$r = x = -3$

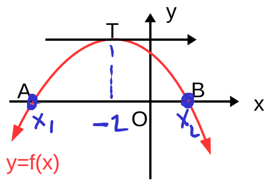
$4 = a.8.(-2) \rightarrow a = -1/4$

$f(-3) = -\frac{1}{4}(-3+8)(-3-2)$

$f(-3) = -\frac{1}{4} . 5 . (-5) = \frac{25}{4}$

Örnek...21 :

Şekilde denklemi $y=-x^2-4x+k+2$ olan parabolün grafiği veriliyor. $5.|OB|=|AO|$ ise T noktasının koordinatları çarpımı kaçtır?



$r = \frac{-b}{2a} = \frac{4}{-2} = -2$

$x_2 = p$

$x_1 = -5p$

$r = \frac{-5p + p}{2} = -2$

$-2p = -2$

$p = 1$

$x_2 = 1$

$B(1, 0)$

$0 = -1 - 4 + k + 2 \rightarrow k = 3$

$y = -x^2 - 4x + 5$

$r = -2 \Rightarrow k = f(-2)$

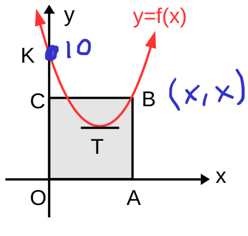
$= -4 + 8 + 5 = 9$

$T(-2, 9) \quad -2 + 9 = 7$

Örnek...22 :

Şekilde tepe noktası T(3,1) olan parabol y eksenini K(0,10) noktasında kesiyor. OABC karesinin B köşesi parabol üzerindedir. Bu karenin alanı kaç birim karedir?

$T(3,1)$



$f(x) = a(x-3)^2 + 1$

$f(0) = 10 \Rightarrow 10 = 9a + 1 \rightarrow a = 1$

$x = (x-3)^2 + 1 \Rightarrow x^2 - 7x + 10 = (x-5)(x-2)$

$x = 5$

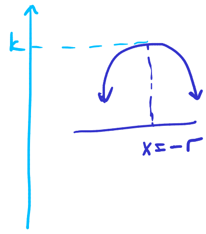
$x = 2$

A(kare) = $5.5 = 25$ br²

(B tepe noktasının sağında $x = 5$ olur)

Örnek...23 :

a, r, k ∈R⁻ olmak üzere gerçek sayılarda tanımlı
$f(x) = a(x + r)^2 + k$ fonksiyonu veriliyor.
Buna göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.
a) f fonksiyonunun artan ve azalan olduğu aralıkları belirtiniz.
b) f fonksiyonunun görüntü kümesini bulunuz.
c) İşaretini inceleyiniz.



Fonksiyonun tepe noktası (-r,k) olur
a negatif olduğu için kollar aşağı yöndedir.

a) f(x) fonksiyonu (-oo,-r] aralığında artan
[-r,oo) için f(x) azalandır.

b) görüntü kümesi (-oo,k] dır

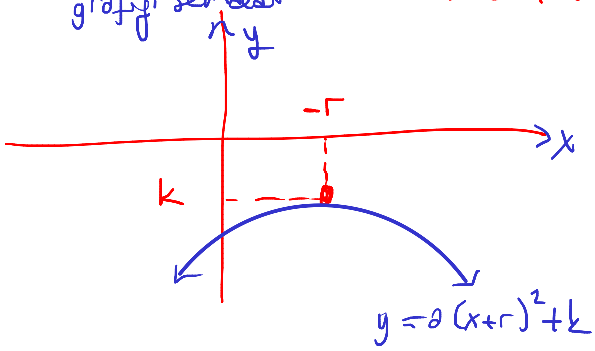
c) işaret tablosu

k<0 ve kollar aşağı yönlü olduğundan

x					
f(x)	−	−	−	−	−

fonksiyon daima negatiftir

$y=a(x+r)^2+k$ $\quad a,r,k \in \mathbb{R}^-$
grafiği şekildedir $\quad T(-r,k)$

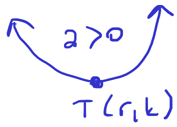


Örnek...24 :

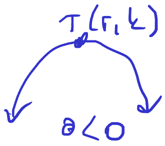
Reel sayılarda $f(x) = ax^2 + bx + c$ olarak verilen fonksiyonun nitel özelliklerini belirtiniz. (a sıfır olmasın)

Tanım kümesi : R
Tepe noktası T(r,k) olsun: r=-b/2a k=f(r) olmak üzere
Görüntü Kümesi: a>0 için [k,oo) , a<0 için (-oo,k]
Sıfırı eğer varsa f(x)=0 denkleminin kökleridir.

a>0 için ,
Artan olduğu bölge : [r,oo)
Azalan olduğu bölge (-oo,r]
Minimum değer: k
Maksimum değer Yok
Minimum noktası T(r,k)



a<0 için,
Artan olduğu bölge : (-oo,r]
Azalan olduğu bölge : [r,oo)
Maksimum değer: k
Minimum değer Yok
Maksimum noktası T(r,k)



Fonksiyon tanım kümesi R'de Bire-bir değildir.
Fonksiyonun değer kümesi R alınırsa örten değildir

Fonksiyon R de b=0 için çift fonksiyondur. (a sıfır olmadığından tek fonksiyon olamaz)

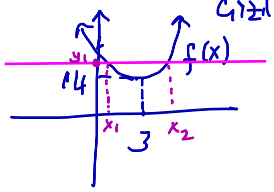
x=r doğrusu fonksiyonun simetri eksenidir.

Örnek...24 :

$f(x)=x^2-6x+23$ karesel fonksiyonunu birebir midir? Açıklamanızı a) grafik üzerinden b)cebirsel yoldan yapınız.

$f(x) = (x-3)^2 - 9 + 23 = (x-3)^2 + 14 \rightarrow T(3,14)$

a) grafik ile
$f(x)$, $y=x^2$ 3 br sağa 14 br yukarı ötelenerek çizilir.



şekildeki yatay pembe çizginin grafiği birden fazla noktada kesmesi f(x) in bire-bir olmadığını gösterir. bunun sebebi pembe doğrunun çizilerek sabitlenen y değeri için iki farklı x değeri bulunmasıdır.

b) Cebirsel yolla
Eğer $f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow x_1=x_2$ (sadece) oluyorsa f 1-1 olur.

$f(x_1)=f(x_2)$ olsun $(x_1-3)^2+14=(x_2-3)^2+14$
$(x_1-3)^2=(x_2-3)^2$
$|x_1-3| = |x_2-3|$
$x_1-3=x_2-3 \quad \vee \quad x_1-3=-x_2+3$
$x_1=x_2 \quad \vee \quad x_1+x_2=6$ $\quad \therefore$ f 1-1 DEĞİLDİR

sonuç olarak sadece x1=x2 çıkmadığından f 1-1 değildir.
ikinci eşitlik bize toplamları 6 olan 2 sayı için görüntülerin aynı olduğunu söyler, örneğin f(1)=f(5) olduğu kolaylıkla görülebilir. (1-1 olması için bağımsız değişken (x) değiştikçe bağımlı değişkenin (y) de farklı olması gerekiyordu)