

GERÇEK SAYILARDA TANIMLI KARESEL FONKSİYONLAR

Karesel fonksiyonlar, günlük yaşamda birçok durumu modellemek için kullanılabilir. Fizikte serbest düşen bir cismin hareketi, ekonomide maksimum kâr ya da minimum maliyet analizleri veya mühendislikte atış hareketi problemleri karesel fonksiyonlara örnektir.

Gerçek sayılarda $f(x)=x^2$ fonksiyonuna ikinci dereceden bir değişkenli karesel fonksiyon denir. Bu fonksiyonun belirttiği eğriye (grafiğine) de **parabol** denir.

Örnek...1 :

Gerçek sayılarda tanımlı karesel referans fonksiyonu $K(2,p)$ noktasından geçiyorsa p kaçtır?

Örnek...2 :

Karesel referans fonksiyonunun grafiğini, cebirsel temsili $y=f(x)=x^2$ ve aşağıdaki tablodan faydalanarak çiziniz. Nitel özelliklerini belirtiniz.

x	...	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	...
f(x)											

Örnek...3 :

$f: [-4, 4] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ şeklinde tanımlı karesel fonksiyonunun grafiğini çiziniz, nitel özelliklerini belirtiniz. Grafiğe göre, fonksiyonun simetri doğrusunu yazınız.

Tanım Kümesi	
Değer Kümesi	
Görüntü Kümesi	
Fonksiyonun Sıfırları	
Pozitif Olduğu Aralıklar	
Negatif Olduğu Aralıklar	
Artan Olduğu Aralıklar	
Azalan Olduğu Aralıklar	
Maksimum Noktası	
Minimum Noktası	
Bire Bir Olma Durumu	
Örtenliği	
Tek çift olma durumu	
İşaret Tablosu (İşaret Tablo Anlatımı)	

Örnek...4 :

$f: [a, b] \rightarrow [4, 25]$,
 $f(x) = (k+2)x^3 + x^2 + (m+1)x + m + k + p$ şeklinde verilen fonksiyon tanımlandığı aralıkta birebir ve azalan karesel referans fonksiyonudur. Buna göre $a + b + k + m + p$ toplamının kaçta eşittir?

KARESEL REFERANS FONKSİYONUNDAN TÜRETİLEN FONKSİYONLAR

Gerçek sayılarda verilen $f(x)=x^2$ fonksiyonundan elde edilen $g(x) = a \cdot f(x \pm r) \pm k$ fonksiyonlarına karesel referans fonksiyonundan türetilmiş fonksiyon denir.

ÖTELEMELERLE REFERANS FONKSİYONU KULLANMAK

$a, r > 0, k > 0 \in \mathbb{R}$ ve $a \neq 0$ olmak üzere $f(x) = x^2$ karesel referans fonksiyonundan türetilen $g(x) = a(x - r)^2 + k$ fonksiyonun grafiği çizilirken şu adımlar uygulanır:

1. adım : $f(x) = x^2$ referans fonksiyonu x eksenini boyunca pozitif yönde r birim ötelenerek (sağa doğru) $h(x) = (x - r)^2$ fonksiyonu çizilir.

2. adım : $h(x) = (x - r)^2$ fonksiyonunun değerlerini a katına eşleyen $k(x) = a(x - r)^2$ fonksiyonu çizilir.

3. adım : $k(x) = a(x - r)^2$ fonksiyonu y eksenini boyunca pozitif yönde k birim ötelenerek $g(x) = a(x - r)^2 + k$ fonksiyonu çizilir.

Örnek...5 :

$f(x)=x^2$ karesel fonksiyonunu referans fonksiyonu olarak alıp grafik temsiline uygulanan dönüşümü belirleyerek istenilen grafikleri çiziniz.

	$y=4 \cdot f(x)=4x^2$	$y=-f(x)=-x^2$
Uygulanacak dönüşüm		
Grafik		

Örnek...6 :

$f(x)=x^2$ karesel fonksiyonunu referans fonksiyonu olarak tabloda verilen grafikleri adımlarını açıklayarak çiziniz.

	$y=f(x+2)=(x+2)^2$	$y=-2 \cdot f(x-1)=-2(x-1)^2$
Uygulanacak dönüşüm		
Grafik		

Örnek...7 :

$f(x)=x^2$ karesel fonksiyonunu referans fonksiyonu olarak alıp

a) $g(x)=4(x+3)^2+1$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

b) Tanım ve görüntü kümelerini bulunuz.

c) Artan-azalan olduğu aralıkları belirleyip eğer varsa minimum maksimum değerlerini hesaplayınız. (işlemlerinizi hem cebirsel hemde geometrik yönlerden inceleyerek yapınız)

Örnek...8 :

$f(x)=x^2$ karesel fonksiyonunu referans fonksiyonu olarak alıp

$y=k(x)=-2.f(x-1)+3=-2(x-1)^2+3$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz. Nitel özelliklerini belirtiniz.

(İncelemeleriniz hem grafik üzerinden , hem cebirsel olmalıdır.)

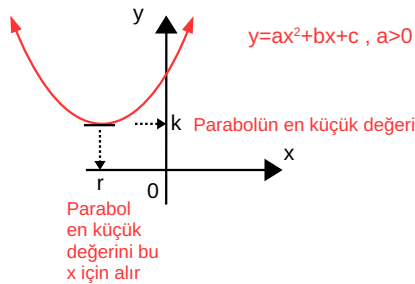
KARESEL FONKSİYONLARIN TAM KARE FORMUNA DÖNÜŞTÜRÜLMESİ

a, r, k, b ve c birer gerçekte sayı, $a \neq 0$ olmak üzere
 $f(x) = a(x + r)^2 + k$ şeklinde tam kareli formu verilen fonksiyonların genel denklemi
 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + bx + c$ dir.

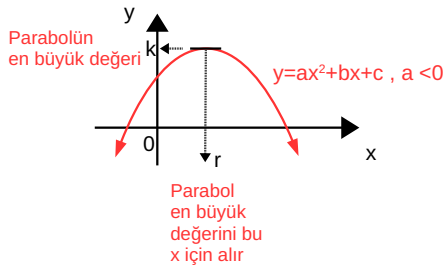
Uyarı

Bir parabolün grafiği başkatsayı olan a sayısına bağlı olarak iki şekilde olabilir.

$a > 0$ için kollar yukarı ve parabol bir en küçük değere (minimum) sahip,



$a < 0$ için kollar aşağı ve parabol bir en büyük değere (maksimum) sahiptir



Her iki durumda da elde edilen ekstremum (yani en küçük veya en büyük değer) tepe noktası denilen noktada elde edilir. (Tanım kümesi tüm reel sayılar)

Tepe noktası, apsisi $x=r=-\frac{b}{2a}$ olan $T(r, f(r))$ olan noktasıdır.

$x=r$ doğrusuna **simetri eksen**i de denir.

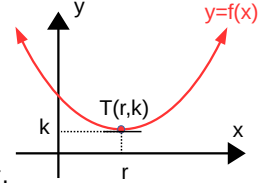
Burada $f(r)$ değeri $a > 0$ için parabolde x 'e verilebilecek tüm değerler için en **küçük** görüntü değeridir. (benzer şekilde $a < 0$ en **büyük** görüntü değeridir.)

$f(x) = ax^2 + bx + c$ ise $f(x) = a(x^2 + \frac{b}{a}x) + c$ ve $\frac{b^2}{4a^2}$ terimini ekleyip çıkararak verilen $f(x) = ax^2 + bx + c = a(x+r)^2 + k$ tam kare formuna tamamlanmış olur.

Tepe noktası bilinen parabol

Şekildeki parabolün denklemi

$y = f(x) = a(x-r)^2 + k$ olarak ifade edilebilir.

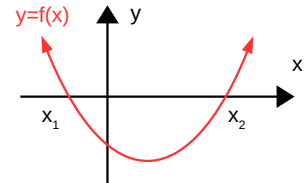


x eksenini kestiği noktaları bilinen parabol

Şekildeki parabolün denklemi

$y = f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$ olarak ifade edilebilir.

Burada a yı bulmak için daha önceki noktalardan farklı bir nokta kullanılır.



Örnek...9 :

$f(x) = x^2 + 6x + 11$ tam kare formatına tamamlanmıştır, inceleyiniz.

$f(x) = x^2 + 6x + 9 - 9 + 11$ (x li terimin yarısı eklendi ve çıkarıldı)

$f(x) = (x + 3)^2 - 9 + 11$ $f(x) = (x + 3)^2 + 2$ istenilen formattadır. Parabolün simetri eksen $x = -3$ doğrusudur.

Örnek...10 :

$f(x) = 2x^2 + 16x + 7$ tam kare formatına tamamlanmıştır, inceleyiniz.

$f(x) = 2(x^2 + 8x) + 7$

$f(x) = 2(x^2 + 8x + 16 - 16) + 7$

(x li terimin yarısı eklendi ve çıkarıldı)

$f(x) = 2[(x + 4)^2 - 16] + 7 = 2(x + 4)^2 - 30$ istenilen formattadır. Parabolün simetri eksen $x = -4$ doğrusudur.

Örnek...11 :

Gerçek sayılarda verilen fonksiyonları tam kareye tamamlayınız.

$f(x) = x^2 - 4x$	
$f(x) = x^2 + 12x - 8$	
$f(x) = 2x^2 - 24x + 5$	
$f(x) = 2x^2 - 6x + 1$	

Örnek...12 :

Gerçek sayılarda cebirsel temsili

$f(x)=x^2 + 8x$ olarak verilen karesel fonksiyonunu

- tam kareye tamamlayınız.
- grafiğini karesel referans fonksiyonuna yapılan dönüşümlerden faydalanarak çiziniz.
- Nitel özelliklerini belirtiniz.
- işaret tablosunu yapınız

Örnek...14 :

g fonksiyonu, karesel referans fonksiyonunun grafik temsilinin x eksenı boyunca pozitif yönde 5 birim, y eksenı boyunca negatif yönde 2 birim ötelenmesi sonucu elde edilen noktayla eşlemektedir. Buna göre, g fonksiyonunun cebirsel temsilini yazınız.

Örnek...15 :

Bir balonun içini doldurabilecek hava hacmi (V) basınç (x) cinsinden $V(x)=20x- x^2$ denklemi ile veriliyor.

Buna göre , bu balonun hacmi en çok kaç br^3 olur?

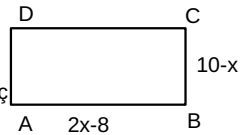
Örnek...13 :

$f(x) = x^2-2x$ fonksiyonunun aşağıda verilen tanım aralıklarında görüntü kümelerini bulunuz.

- $x \geq 1$
- $-4 \leq x < 0$
- $-3 \leq x \leq 5$

Örnek...16 :

Şekilde bir kenarı $2x-8$, diğer kenarı $10-x$ olan dikdörtgen veriliyor. Bu dikdörtgenin alanı en çok kaç birim karedir?



Örnek...17 :

Türk lirası olarak x alış ve y satış fiyatına sahip bir malın satış ve alış fiyatı arasında $y=13x-x^2-20$ bağıntısı vardır. Bu alışverişte kar en fazla kaç TL olur?

Örnek...18 :

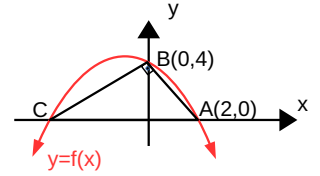
Müşterilerine internet erişimi sağlayan bir telekom şirketi belirli bir paketi aylık 600 ₺ 'den satmaktadır. Şirket, fiyat artışının müşteri sayısını nasıl etkilediğini anlamak ve toplam gelirini maksimuma çıkaracak fiyatı belirlemek istemektedir. Yapılan bir pazar araştırmasına göre internet paketinin fiyatı her 40 ₺ artırıldığında hizmeti satın alan müşteri sayısı 40 kişi azalmakta, paketin fiyatı her 40 ₺ azaltıldığında ise müşteri sayısı 40 kişi artmaktadır. Şirket sahibi bu paketi şu anda 600 ₺'den 1000 kişiye satmaktadır.

a) x her bir 40 ₺'lik fiyat artışını ifade etmek üzere müşteri sayısını ve paketin yeni fiyatını cebirsel olarak ifade ediniz.

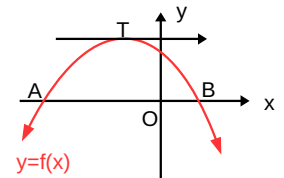
b) Elde ettiğiniz cebirsel ifadelerle şirket sahibinin bu kahveden elde edeceği gelir fonksiyonunu (isim olarak $g(x)$ diyelim) modelleyip, elde edilebilecek maksimum geliri bulunuz.

Örnek...19 :

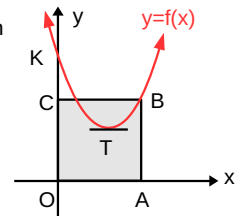
Şekildeki parabol x eksenini $A(2,0)$ ve C , y eksenini ise $B(0,4)$ noktalarında kesiyor. ABC dik üçgendir. Fonksiyonun görüntü kümesindeki en büyük sayıyı bulunuz?

**Örnek...20 :**

Şekilde denklemleri $y=-x^2-4x+k+2$ olan parabolün grafiği veriliyor. 5. $|OB|=|AO|$ ise T noktasının koordinatları çarpımı kaçtır?

**Örnek...21 :**

Şekilde tepe noktası $T(3,1)$ olan parabol y eksenini $K(0,10)$ noktasında kesiyor. $OABC$ karesinin B köşesi parabol üzerindedir. Bu karenin alanı kaç birim karedir?



Örnek...22 :

$a, r, k \in \mathbb{R}^-$ olmak üzere gerçekte sayılarda tanımlı $f(x) = a(x+r)^2 + k$ fonksiyonu veriliyor.

Buna göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

- f fonksiyonunun artan ve azalan olduğu aralıkları belirtiniz.
- f fonksiyonunun görüntü kümesini bulunuz.
- İşaretini inceleyiniz.

Örnek...23 :

Reel sayılarda $f(x) = ax^2 + bx + c$ olarak verilen fonksiyonun nitel özelliklerini belirtiniz.

Örnek...24 :

$f(x) = x^2 - 6x + 23$ karesel fonksiyonunu birebir midir?
Açıklamanızı a) grafik üzerinden
b) cebirsel yoldan yapınız.