

GERÇEK SAYILARDA FONKSİYONLAR

Günlük hayatta iki nicelik arasındaki doğrusal ilişkilere sıklıkla rastlanmaktadır. Örneğin, sabit hızla hareket eden bir cismin katettiği mesafe ile zaman doğrusal ilişkilidir. Bunu $x=V.t$ şeklinde ifade edebiliriz. Bazı olay ve durumlarda ise ilişki doğrusal türde olmayabilir, örneğin bir aracın durma mesafesi ile hızının karesi ilişki içindedir. Bunu $x=k.v^2$ şeklinde ifade ederiz.

x ve y birbirine bağlanmış iki değişken ise aralarında $y=f(x)$ biçiminde bir eşitlik yazılabilir.
 $\forall x \in \mathbb{R}$ için bir ve yalnız bir $f(x) \in \mathbb{R}$ varsa f ye gerçekte sayılarda bir fonksiyon denir ve $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, y = f(x)$ şeklinde gösterilir.

Örnek...1 :

İstanbul ilinde taksi fiyatlandırması, taksimetre açılış ücreti 42 ₺ olmak üzere her kilometre başına 28 ₺ ile belirlenmektedir.

a) Buna göre yolculuk mesafesine göre toplam ücreti ifade eden aşağıdaki tabloyu doldurunuz

Gidilen km	0	1	2	3	10	x
Ücret (₺)						

b) doğrusal ilişkinin cebirsel temsilini yazınız.

c) cebirsel temsilin grafiğini çizin.

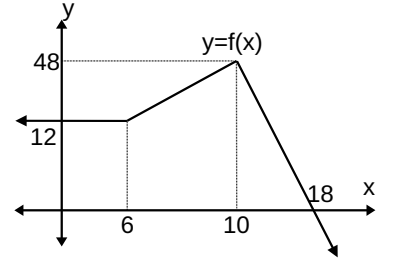
d) doğrusal ilişkinin cebirsel ve grafik temsilini kullanarak fonksiyon olma şartlarını taşıyıp taşımadığını belirleyiniz.

e) fonksiyonun nitel özelliklerini belirtiniz.

Tanım Kümesi	
Görüntü Kümesi	
Fonksiyonun Sıfırları	
Pozitif Olduğu Aralıklar	
Negatif Olduğu Aralıklar	
Artan Olduğu Aralıklar	
Azalan Olduğu Aralıklar	
Maksimum Noktası	
Minimum Noktası	
Bire Bir Olma Durumu	

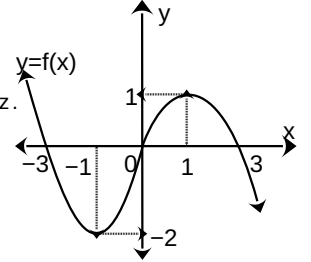
Örnek...2 :

Grafiği verilen fonksiyonun nitel özelliklerini belirtiniz. Fonksiyonu cebirsel olarak ifade ediniz.



Örnek...3 :

Grafik temsili verilen şeklin fonksiyon olma şartlarını sağlayıp sağlamadığını belirtiniz.



(Hatırlatma)

Örnek...4 :

$f(x)=4(x+2)-7$ fonksiyonunun grafiğini $y=x$ referans fonksiyonu ile çizin

Çözüm

İstenen fonksiyon $y=g(x)=x$ referans fonksiyon olarak düşünüldüğünde $4.g(x+2)-7$ olacağından

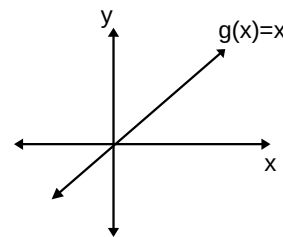
adım1 $y=x$ grafiği 2 birim sola kayar (x yerine $x+2$ gelmiş)

adım2 adım1 deki fonksiyonu 4 ile çarpıp (dikeyde gererek-açarak x ekseninden uzaklaştırma)

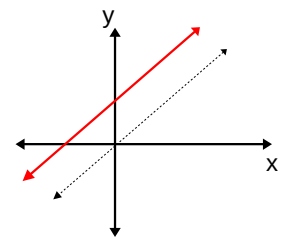
adım3 adım2 deki fonksiyon düşeyde 7 birim aşağı ötelenir.

Bu adımları çizime aktarırsak:

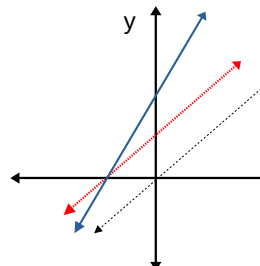
Referans Fonksiyon



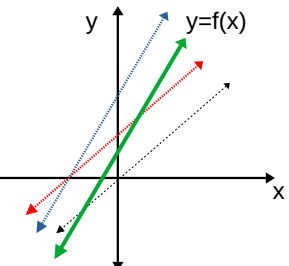
Adım 1



Adım 2



Adım 3



Mühendislik ve mimaride birçok yapı doğrusal olmayan fonksiyonlarla modellenenebilir. Görseldeki köprünün direklerini birbirine bağlayan halatlar ve Görsel 2'de verilen caminin kubbesi bu tür modellere örnektir.

Görsel1



Görsel2

**Örnek...5 :**

Sürtünmesiz bir ortamda bir cismin serbest düşme hareketi; $h(t)$ t anındaki cismin yerden yüksekliği (m), h_0 cismin ilk yüksekliği, g yer çekimi ivmesi (dünya için yaklaşık $9,8 \text{ m/sn.}^2$)

ve t zaman (sn.) olmak üzere $h(t)=h_0-\frac{1}{2}gt^2$

fonksiyonu ile hesaplanır.

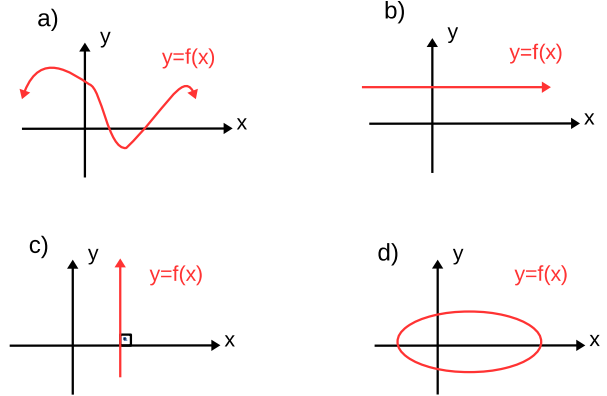
Yerden $h_0=100 \text{ m}$ yükseklikte bulunan bir cismin grafiğini tabloyu doldurunuz ve serbest düşme hareketini ifade eden fonksiyonunun grafiğini çiziniz . (Hesaplama kolaylığı açısından $g=10$ alınız)

Grafiğinizin doğrusal fonksiyon grafiğinden neden farklılaştığını açıklayınız.

t	0	1	2	3	4
h(t)					

Örnek...6 :

Hangi grafik bir fonksiyona ait olabilir?

**Örten Fonksiyon**

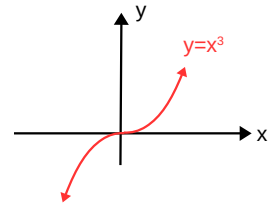
Bir f fonksiyonunda tanım kümesindeki elemanlar, değer kümesindeki elemanlarla değer kümesinin hiçbir elemanı açıkta kalmayacak şekilde eşleşiyorsa f fonksiyonu örten dir." Kısaca $f:A \rightarrow B$ fonksiyonunda $f(A)=B$ oluyorsa f örten dir.

► Örten olmayan bir fonksiyona "içine fonksiyondur" denir.

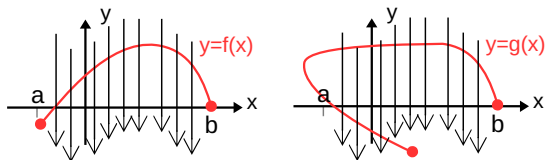
Özetlersek, bir fonksiyonun örten mi içine mi olduğunu anlamak için , değer kümesinden seçilecek her eleman için tanım kümesinden bir elemanın eşleşip eşleşmediğini bilmek gerekir.

Örnek...7 :

Şekildeki fonksiyonun Reel sayılar kümesinde örten fonksiyon mudur?

**DÜŞEY DOĞRU TESTİ**

Bir grafikte y eksenine çizilen paralel doğrular grafiği birden fazla noktada kesiyorsa o ilişki (eşleme) fonksiyon değildir.



$y=f(x)$, $[a,b]$ tanım aralığı için fonksiyondur. (düşey çizgiler grafiği daima tek noktada kesiyor)

$y=g(x)$, $[a,b]$ tanım aralığı için fonksiyon değildir. (düşey çizgiler grafiği bazen birden fazla noktada kesiyor)

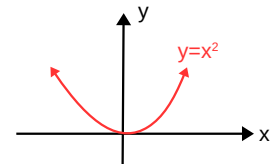
Yatay Doğru Testi

Verilen bir fonksiyon grafiğinden örtenliği/içineliliği anlamak için x eksenine paralel doğrular çizer, değer kümesi elemanları için bu doğrunun grafiği kesip kesmeme durumuna göre karar veririz.

Örnek...8 :

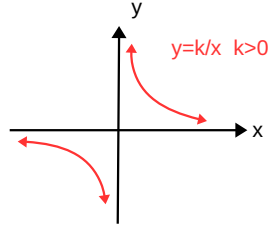
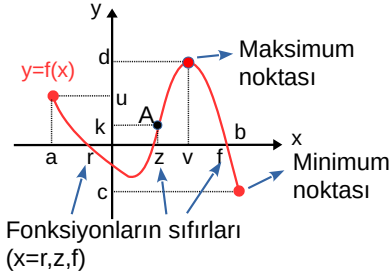
Şekildeki fonksiyonun değer kümesi Reel sayılar kümesi alınırsa fonksiyon içinedir.

Eğer değer kümesi $[0, \infty)$ alınırsa fonksiyon örten dir.



Örnek...9 :

Şekildeki fonksiyonun değer kümesi Reel sayılar kümesi ise bu fonksiyon örten midir?

**Grafik bilgilerimizi özetlersek**

Grafiğe göre aşağıdakileri söyleyebiliriz
 ► Yukarıda verilen grafikte x değerleri $[a, b]$ aralığından seçildiği için tanım kümesi $[a, b]$, görüntü kümesi ise $[c, d]$ kümesidir.

► $A(z, k)$ noktası $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği üzerinde olduğundan $f(z) = k$ yazılır. ($A(z, k)$ ikilisinin analitik düzlemdeki görüntüsü A noktasıdır.)

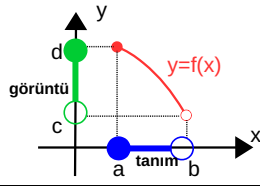
► (r, z) ve $(f, b]$ aralığında fonksiyon negatiftir.

► $[v, b]$ aralığında $f(x)$ azalandır.

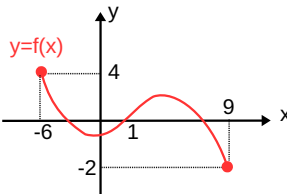
► fonksiyonun üç adet sıfırı vardır.

Tanım Kümesi : $[a, b)$

Görüntü Kümesi : $(c, d]$

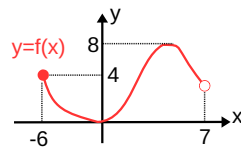
**Örnek...10 :**

Aşağıda grafikleri verilen fonksiyonların tanım ve görüntü kümelerini yazınız



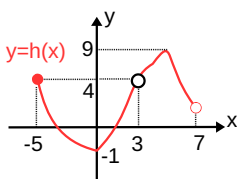
T.K.

G.K.



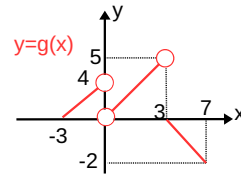
T.K.

G.K.



T.K.

G.K.

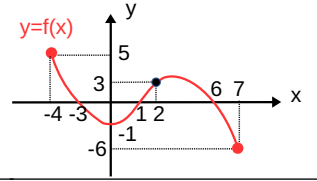


T.K.

G.K.

Örnek...11 :

Yandaki grafik $y = f(x)$ fonksiyonuna aittir. Buna göre istenilenleri bulunuz?



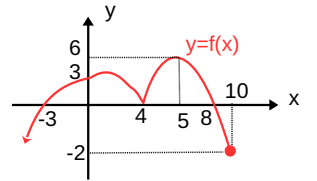
a) $f(2) + f(6) - f(7) =$

b) Tabloyu doldurunuz

Tanım Kümesi	
Görüntü Kümesi	
Fonksiyonun Sıfırları	
Pozitif Olduğu Aralıklar	
Negatif Olduğu Aralıklar	
Artan Olduğu Aralıklar	
Azalan Olduğu Aralıklar	
Maksimum Noktası	
Minimum Noktası	
Bire Bir Olma Durumu	
Örten Olma Durumu	

Örnek...12 :

Yandaki grafik $y = f(x)$ fonksiyonuna aittir. Buna göre istenilenleri bulunuz.



a) fonksiyonun sıfırlarını belirtiniz.

b) $\frac{f(0)+f(4).f(9)}{f(-3).f(5)}$ işleminin sonucu kaçtır?

c) $f(x) = 2$ denkleminin kaç kökü vardır?

d) fonksiyonun işaret tablosunu yapınız

Örnek...13 :

$A = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$ olmak üzere $f(x) = \frac{x+3}{x^2-4}$

cebirsel temsili A dan R ye tanımlanan bir fonksiyon mudur?

Örnek...14 :

Gerçek sayılarda, bir fonksiyonun birebir ve örten olmasını sembolik mantık diliyle ifade ediniz.

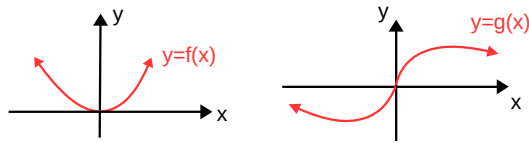
TEK VE ÇİFT FONKSİYONLAR

$f : [-p,p] \rightarrow B$ olmak üzere ,tanım kümesine ait her x elemanı için

$f(-x) = f(x)$ oluyorsa f fonksiyonuna çift fonksiyon denir.

$f(-x) = -f(x)$ oluyorsa f fonksiyonuna tek fonksiyon denir.

Tek fonksiyonların grafikleri orjine göre, çift fonksiyonların grafikleri y eksenine göre simetriktr

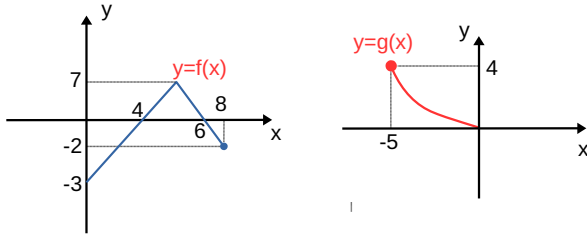


soldaki $y=f(x)$ çift fonksiyon, sağdaki $y=g(x)$ tek fonksiyondur

Bir fonksiyon tek veya çift olmak zorunda değildir.

Örnek...15 :

Aşağıda iki farklı grafik temsilinin bir kısmı verilmiştir. f çift fonksiyon, g tek fonksiyon olduğuna göre fonksiyonların eksik olan kısımlarını tamamlayınız.



Örnek...16 :

Aşağıda verilen ve gerçık sayılar kümesinde tanımlı fonksiyonların tek fonksiyon ya da çift fonksiyon olup olmadıklarını belirleyiniz.
 $f(x)=x^3$, $g(x)=|x|$, $h(x)=x^2+x$

Örnek...17 :

$f(x)$ tek bir fonksiyon ve $f:\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$5.f(x)+2.f(-x)=3x^3+12x \quad \text{biçiminde tanımlıdır.}$$

a) $f(x)$ i bulunuz b) $f(0)$ kaçtır?

Örnek...18 :

p,r,a,b,c,d gerçık (reel) sayılar olmak üzere (p,r) kümesinde tanımlı $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ fonksiyonu

a) tek fonksiyon ise p,r,a,b,c,d sayıları nasıl seçilmelidir?

b) çift fonksiyon ise p,r,a,b,c,d sayıları nasıl seçilmelidir?

Örnek...19 :

$f:[a,3] \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x)=(m-2)x^3+(n-3)x^2+(a+n-5)x+2$ fonksiyonu çift fonksiyon ise $f(a)=?$

Örnek...20 :

$f(x)$ tek bir fonksiyon ve $f:\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$4.f(x)+2.f(-x)=3x^3+2x+k-2$$

ise $f(k)$ kaçtır?

Örnek...21 :

I. $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $f(x) = x + 1$

II. $g : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$, $g(x) = 6x$

III. $h : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = x^5$

Yukarıda verilen fonksiyonlardan hangileri örten ve tek fonksiyondur?