GERÇEK SAYILARDA FONKSİYONLAR

Günlük hayatta iki nicelik arasındaki doğrusal ilişkilere sıklıkla rastlanmaktadır. Örneğin, sabit hızla hareket eden bir cismin katettiği mesafe ile zaman doğrusal ilişkilidir. Bunu x=V.t şeklinde ifade edebiliriz. Bazı olay ve durumlarda ise ilişki doğrusal türde olmayabilir, örneğin bir aracın durma mesafesi ile hızının karesi ilişki içindedir. Bunu $x=k.v^2$ şeklinde ifade ederiz.

x ve y birbirine bağlanmış iki değişken ise aralarında y=f(x) biçiminde bir eşitlik yazılabilir.
$\forall x\in\mathbb{R}$ için bir ve yalnız bir $f(x)\in\mathbb{R}$ varsa f ye gerçek sayılarda bir fonksiyon denir ve $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$,y = f(x) şeklinde gösterilir.

Örnek...1 :
İstanbul ilinde taksi fiyatlandırması, taksimetre açılış ücreti 42 ₺ olmak üzere her kilometre başına 28 ₺ ile belirlenmektedir.

a) Buna göre yolculuk mesafesine göre toplam ücreti ifade eden aşağıdaki tabloyu doldurunuz

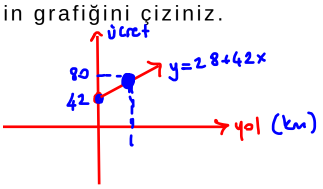
Gidilen km	0	1	2	3	10	x
Ücret (₺)	42	80	108	136	322	42+28x

b) doğrusal ilişkinin cebirsel temsilini yazınız.

ücret = y
km = x
y = 42+28x

c) cebirsel temsilin grafiğini çiziniz.

x	y
0	28
1	80



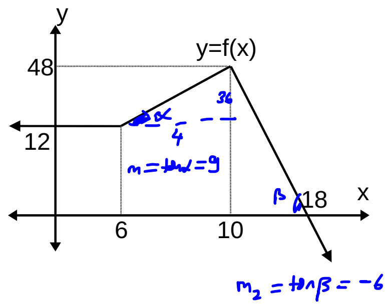
d) doğrusal ilişkinin cebirsel ve grafik temsilini kullanarak fonksiyon olma şartlarını taşıyıp taşımadığını belirleyiniz.

cebirsel ve grafik temsillerde tanım, kümesinin her x elemanı için yalnız bir y karşılık geldiğinden f fonksiyondur.

e) fonksiyonun nitel özelliklerini belirtiniz.

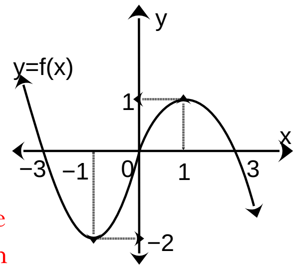
Tanım Kümesi	[0,∞)
Görüntü Kümesi	[42,∞)
Fonksiyonun Sıfırları	Yok
Pozitif Olduğu Aralıklar	[0,∞)
Negatif Olduğu Aralıklar	Yok
Artan Olduğu Aralıklar	[0,∞)
Azalan Olduğu Aralıklar	Yok
Maksimum Noktası	Yok
Minimum Noktası	(0,42)
Bire Bir Olma Durumu	Bire-birdir.

Örnek...2 :
Grafiği verilen fonksiyonunun nitel özelliklerini belirtiniz. Fonksiyonu cebirsel olarak ifade ediniz.



$$f(x)=\begin{cases} 12 & x\leq 6 \\ 9x-42 & 6\leq x<10 \\ -6x+108 & x>10 \end{cases}$$

Örnek...3 :
Grafik temsili verilen şeklin fonksiyon olma şartlarını sağlayıp sağlamadığını belirtiniz. Grafik doğrusal bir fonksiyondan nasıl farklılaşmaktadır?

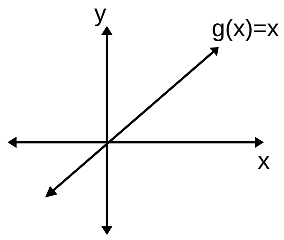


R de tanımlı ifade de her x değerine karşılıktek bir y değeri geldiğinden ifade bir fonksiyondur.
Doğrusal fonksiyonlarda değişmeyen (sabit) eğim vardır. bu grafikte eğim değişmektedir.

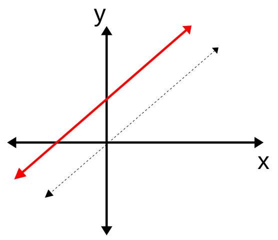
(Hatırlatma)
Örnek...4 :
f(x)=4(x+2)−7 fonksiyonunun grafiğini y=x referans fonksiyonu ile çiziniz

Çözüm
İstenen fonksiyon y=g(x)=x referans fonksiyon olarak düşünüldüğünde 4.g(x+2)−7 olacağından
adım1 y=x grafiği 2 birim sola kayar (x yerine x+2 gelmiş)
adım2 adım1 deki fonksiyonu 4 ile çarparız (dikeyde gererek−açarak x ekseninden uzaklaştırma)
adım3 adım2 deki fonksiyon düşeyde 7 birim aşağı ötelenir.
Bu adımları çizime aktarırsak:

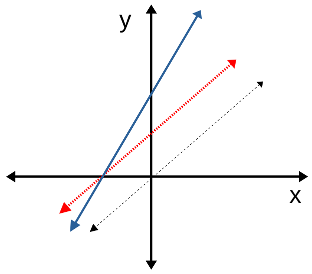
Referans Fonksiyon



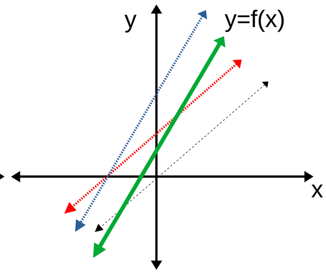
Adım 1



Adım 2



Adım 3



Mühendislik ve mimaride birçok yapı doğrusal olmayan fonksiyonlarla modellenebilir. Görseldeki köprünün direklerini birbirine bağlayan halatlar ve

Görsel 2'de verilen caminin kubbesi bu tür modellere örnektir.

Görsel1

Görsel2

Örnek...5 :

Sürtünmesiz bir ortamda bir cismin serbest düşme hareketi; h(t) t anındaki cismin yerden yüksekliği (m), h_0 cismin ilk yüksekliği, g yer çekimi ivmesi (dünya için yaklaşık 9,8 m/sn.²) ve t zaman (sn.) olmak üzere $h(t)=h_0-\frac{1}{2}gt^2$ fonksiyonu ile hesaplanır.

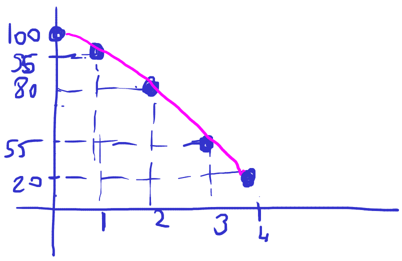
Yerden h_0=100 m yükseklikte bulunan bir cismin grafiğini tabloyu doldurunuz ve serbest düşme hareketini ifade eden fonksiyonunun grafiğini çiziniz . (Hesaplama kolaylığı açısından g=10 alınız)

Grafiğinizin doğrusal fonksiyon grafiğinden neden farklılaştığını açıklayınız.

t	0	1	2	3	4
h(t)	100	95	80	55	20

$h = 100 - \frac{1}{2} \cdot 10t^2$

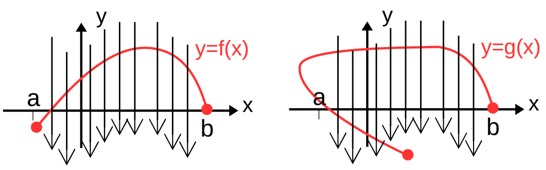
$h = 100 - 5t^2$



hareket sabit bir eğimle devam etmiyor. x deki her 1 br değişiklik y (h(t)) değerinde giderek daha fazla değişiim yaratıyor

DÜŞEY DOĞRU TESTİ

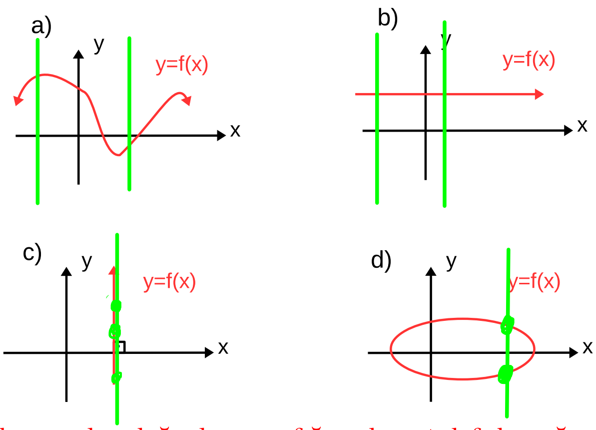
Bir grafikte y eksenine çizilen paralel doğrular grafiği birden fazla noktada kesiyorsa o ilişki (eşleme) fonksiyon değildir.



y=f(x) , [a,b] tanım aralığı için fonksiyondur. (düşey çizgiler grafiği daima tek noktada kesiyor)
y=g(x) , [a,b] tanım aralığı için fonksiyon değildir. (düşey çizgiler grafiği bazen birden fazla noktada kesiyor)

Örnek...6 :

Hangi grafik bir fonksiyona ait olabilir?



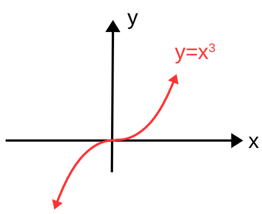
dikey çizilen doğruların grafiği sadece 1 defa kestiği a ve b deki grafikler bir fonksiyon grafiği olabilir.c ve d de grafikler birden fazla kez keşitiğinden bir fonksiyona ait olamaz

Örten Fonksiyon

Bir f fonksiyonunda tanım kümesindeki elemanlar, değer kümesindeki elemanlarla değer kümesinin hiçbir elemanı açıkta kalmayacak şekilde eşleşiyorsa f fonksiyonu örtendir."
Kısaca f:A→B fonksiyonunda f(A)=B oluyorsa f örtendir.
►Örten olmayan bir fonksiyona “içine fonksiyondur” denir.
Özetlersek, bir fonksiyonun örten mi içine mi olduğunu anlamak için , değer kümesinden seçilecek her eleman için tanım kümesinden bir elamanın eşleşip eşleşmediğini bilmek gerekir.

Örnek...7 :

Şekildeki fonksiyonun Reel sayılar kümesinde örten fonksiyon mudur?



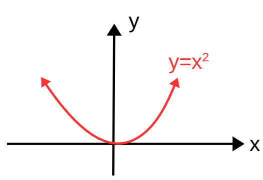
yatay çizilen çizgiler fonksiyon grafiğini daima keseceğinden değer kümesi R alınırsa fonksiyon örten olacaktır.

Yatay Doğru Testi

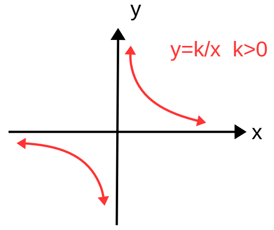
Verilen bir fonksiyon grafiğinden örtenliği/içineliği anlamak için x eksenine paralel doğrular çizer, değer kümesi elamanları için bu doğrunun grafiği kesip kesmeme durumuna göre karar veririz.

Örnek...8 :

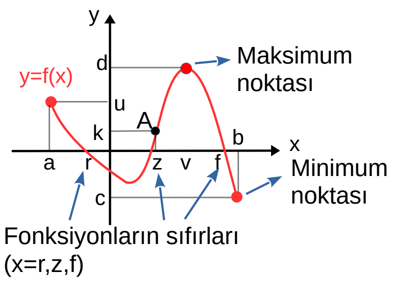
Şekildeki fonksiyonun değer kümesi Reel sayılar kümesi alınırsa fonksiyon içinedir.
Eğer değer kümesi [0, ∞) alınırsa fonksiyon örtendir.



Örnek...9 :
Şekildeki fonksiyonun değer kümesi Reel sayılar kümesi ise bu fonksiyon örten midir?



Grafik bilgilerimizi özetlersek



Grafiğe göre aşağıdakileri söyleyebiliriz
► Yukarıda verilen grafikte x değerleri [a,b] aralığından seçildiği için tanım kümesi [a,b] , görüntü kümesi ise [c,d] kümesidir.

► A(z, k) noktası y = f(x) fonksiyonunun grafiği üzerinde olduğundan f(z) = k yazılır. (A(z, k) ikilisinin analitik düzlemdeki görüntüsü A noktasıdır.)

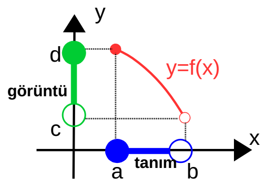
► (r,z) ve (f,b] aralığında fonksiyon negatiftir.

► [v,b] aralığında f(x) azalandır.

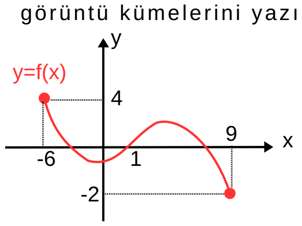
► fonksiyonun üç adet sıfırı vardır.

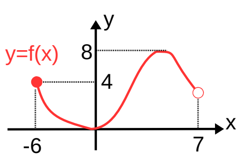
Tanım Kümesi : [a,b)

Görüntü Kümesi : (c,d]

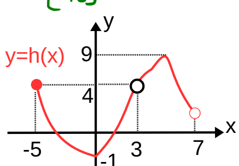


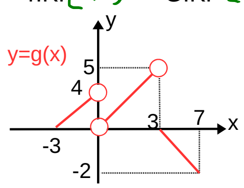
Örnek...10 :
Aşağıda grafikleri verilen fonksiyonların tanım ve görüntü kümelerini yazınız





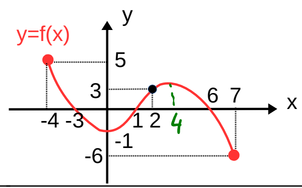
T.K. [-6,9] G.K [-2,4]. T.K. [-6,7) G.K. [0,8]





T.K. [-5,7)−{3} G.K [−1,9] . T.K. [−3,7]−{0} G.K. [−2,5)

Örnek...11 :
Yandaki grafik y=f(x) fonksiyonuna aittir. Buna göre istenilenleri bulunuz?

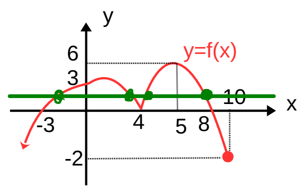


a) $\overset{3}{f(2)}+\overset{0}{f(6)}-\overset{-6}{f(7)}=$ 9

b) Tabloyu doldurunuz

Tanım Kümesi	[−4,7]
Görüntü Kümesi	[−6,5]
Fonksiyonun Sıfırları	−3, 1, 6
Pozitif Olduğu Aralıklar	[−4,−3) ∪ (1,6)
Negatif Olduğu Aralıklar	(−3,1) ∪ (6,7]
Artan Olduğu Aralıklar	[0,4]
Azalan Olduğu Aralıklar	[−4,0] ∪ [4,7]
Maksimum Noktası	(−4,5) / maks değeri 5 tir
Minimum Noktası	(7,−6) / min değer −6 dır.
Bire Bir Olma Durumu	bire bir değildir.
Örten Olma Durumu	değer kümesi [-6, 5] için örtendir

Örnek...12 :
Yandaki grafik y=f(x) fonksiyonuna aittir. Buna göre istenilenleri bulunuz.



a) fonksiyonun sıfırlarını belirtiniz.

b) $\dfrac{f(0)+f(4).f(9)}{f(-3)+f(5)}$ işleminin sonucu kaçtır?

c) f(x)=2 denkleminin kaç kökü vardır?

d) fonksiyonun işaret tablosunu yapınız

d)
x	−∞	−3		4		8		10
	−	0	+	0	+	0	−	

a) x=-3 ,x=4 ,x=8 fonksiyonun sıfırlarıdır.

b) $\dfrac{3+0\cdot f(9)}{0+6}=\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}$

c) y=2 için yatay çizgi çizersek grafiği 4 noktada keser. kesim noktası sayısı kadar yani 4 kök vardır

Örnek...13 :

A = {−1, 0, 1, 2, 3} olmak üzere $f(x)=\dfrac{x+3}{x^2-4}$ cebirsel temsili A dan R ye tanımlanan bir fonksiyon mudur?

cebirsel ifade bir fonksiyon değildir.
x=2 için bir y bulunamaz.

Örnek...14 :
Gerçek sayılarda , bir fonksiyonun birebir ve örten olmasını sembolik mantık diliyle ifade ediniz.

$f: A \to B$ olsun $\forall x \in A \Rightarrow \exists! y \in B : f(x)=y \Rightarrow f(x)$ birebirdir.

$\forall y \in B \Rightarrow \exists x \in A \Rightarrow f(x)$ örtendir.

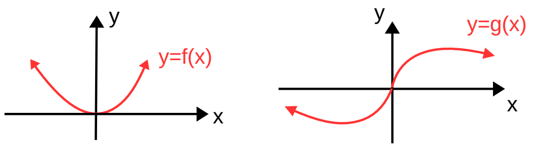
TEK VE ÇİFT FONKSİYONLAR

f : [−p,p]→ B olmak üzere ,tanım kümesine ait <u>her</u> x elemanı için

f (−x) =f (x) oluyorsa f fonksiyonuna çift fonksiyon denir.

f (−x) =−f (x) oluyorsa f fonksiyonuna tek fonksiyon denir.

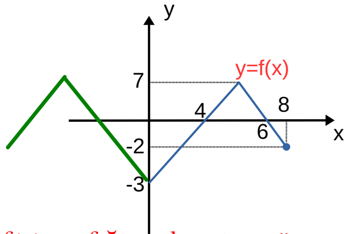
Tek fonksiyonların grafikleri orjine göre, çift fonksiyonların grafikleri y eksenine göre simetriktir

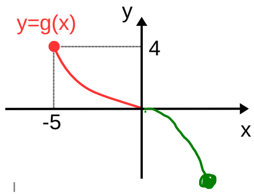


soldaki y=f(x) çift fonksiyon, sağdaki y=g(x) tek fonksiyondur

Bir fonksiyon tek veya çift olmak zorunda değildir.

Örnek...15 :
Aşağıda iki farklı grafik temsilinin bir kısmı verilmiştir. f çift fonksiyon, g tek fonksiyon olduğuna göre fonksiyonların eksik olan kısımlarını tamamlayınız.





f(x) grafiği y eksenine göre
g(x) grafiği orjine göre simetrik olmalıdır.

Örnek...16 :
Aşağıda verilen ve gerçek sayılar kümesinde tanımlı fonksiyonların tek fonksiyon ya da çift fonksiyon olup olmadıklarını belirleyiniz.
$f(x)=x^3$, $g(x)=|x|$, $h(x)=x^2+x$

$f(-x)=-x^3=-f(x) \Rightarrow$ f tektir.

$g(-x)=|-x|=|x|=g(x) \Rightarrow$ g(x) çifttir.

$h(-x)=(-x)^2+(-x)=x^2-x \neq h(x)$
$\neq h(-x)$

h(x) ne tek ne de çifttir.

Örnek...17 :
f(x) tek bir fonksiyon ve f:IR→IR
$5.f(x)+2.f(-x)=3x^3+12x$ biçiminde tanımlıdır.
a) f(x) i bulunuz b) f(0) kaçtır?

a) $f(-x)=-f(x)$
$5f(x)+2.(-f(x))=3x^3+12x$
$3f(x)=3x^3+12x \rightarrow f(x)=x^3+4x$

b) $f(0)=0^3+4.0=0$

Örnek...18 :
p,r,a,b,c,d gerçek (reel) sayılar olmak üzere (p,r) kümesinde tanımlı $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ fonksiyonu
a) tek fonksiyon ise p,r,a,b,c,d sayıları nasıl seçilmelidir?
b) çift fonksiyon ise p,r,a,b,c,d sayıları nasıl seçilmelidir?

tek de olsa çift de olsa
$p+r=0$ (aralık simetrik olmalıdır)
$p=-r$

a) tekse $b=0$, $d=0$

b) çiftse $a=0$, $c=0$

$n=8$
$-3+n-5=0$

Örnek...19 :
f:[a,3]→IR $f(x)=(m-2)x^3+(n-3)x^2+(a+n-5)x+2$
fonksiyonu çift fonksiyon ise f(a)=?

2, 0, 0

$a=-3$
$n=8$

$f(x)=5x^2+2$

$f(-3)=f(3)=47$

Örnek...20 :
f(x) tek bir fonksiyon ve f:IR→IR
$4.f(x)+2.f(-x)=3x^3+2x+k-2$
ise f(k) kaçtır?

$f(-x)=-f(x)$

$4f(x)+2f(-x)=2f(x)=3x^3+2x+k-2$

$f(x)=\frac{3x^3}{2}+x+\frac{k-2}{2} \rightarrow k=2$
0

$f(2)=\frac{3}{2}.2^3+2=14$

Örnek...21 :
I. f : N → N, f(x) = x + 1
II. g: Q → Q, g(x) = 6x
III. h: Z → R, $h(x) = x^5$
Yukarıda verilen fonksiyonlardan hangileri örten ve tek fonksiyondur?

f fonksiyonu bire-bir içine ne tek ne çift fonksiyondur
g fonksiyonu bire-bir ve örten tek fonksiyondur.
h fonksiyonu bire-bir ve içine tek fonksiyondur.

sadece II