Grafikler ve Dönüşümler

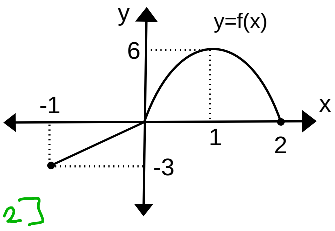
FONKSİYON GRAFİKLERİ VE NİTEL ÖZELLİKLER

Fonksiyonun Nitel Özellikleri

Genel olarak y=f(x) için, fonksiyonun sıfırı (x ekseni kesim noktası), tanım kümesi, işareti, artanlık–azalanlığı, bire birliği, örtenliği, y eksenini kestiği nokta, görüntü kümesi, maksimum ve minimum noktalarına nitel özellikleri denir.

Örnek...1 :

Yanda y=f(x) fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Buna göre fonksiyonun nitel özelliklerini belirtiniz.



Tanım Kümesi $[-1,2]$

Görüntü Kümesi $[-3,6]$

Sıfırı $x=0$, $x=2$ (0 ve 2)

O_y kesim noktası $(0,0)$

Maksimum noktası ve değeri $(1,6)$, değer 6

Minimum noktası ve değeri $(-1,-3)$ değer -3

Artan olduğu aralık $[-1,1]$

Azalan olduğu aralık $[1,2]$

Bire–birlik Yok ($f(x_1)=f(x_2)$ olacak şekilde x_1, x_2 bulunabilir. $(x_1 \neq x_2)$)

→ çizilecek yatay çizgiler daima grafiği tek noktada kesmiyor!

İşaret Tablosu

x	$-\infty$	-1		0		2	
f(x)	tanımsız		$-$	0	$+$	0	tanımsız

f(x)=ax+b fonksiyonlarının çizimi

f:ℝ→ℝ olmak üzere f (x)=ax+b $(a\neq0)$ fonksiyonunun grafiği dik koordinat sisteminde y =ax+b doğrusunun grafiğini belirtir. Bu doğrunun grafiğini çizmek için iki farklı yol izleyebiliriz.

g(x)=ax+b fonksiyonunun grafiğini çizerken

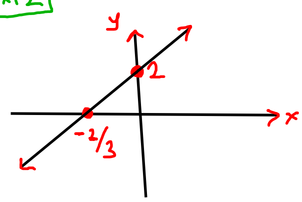
1.yol y=ax+b denklemini sağlayan en az 2 tane farklı sıralı ikili seçilip bu sıralı ikililer dik koordinat sisteminde işaretlenir ve işaretlenen noktalar bir doğru oluşturacak şekilde birleştirilip doğru çizilir.

Örnek...2 :

f(x)=3x+2 fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

$\boxed{y=3x+2}$

x	y
0	2
$-2/3$	0



2.yol
f(x)=x fonksiyonu ile başlayıp dönüşümleri kullanmak (istenen a.f(x)+b olduğundan)
(Yani özetle sırasıyla x → ax → ax+b)
(Bu çizimi yapmadan hatırlatmalara bakalım)

Doğrusal fonksiyonları çizmek için **pratik olmayabilen dönüşümlerle grafiğin oluşturulması yöntemi**, 10.sınıfta göreceğimiz karesel, köklü,rasyonel fonksiyonların referans fonksiyonlarla çizimlerinde işlerimizi çok kolaylaştırır.

DÖNÜŞÜMLER

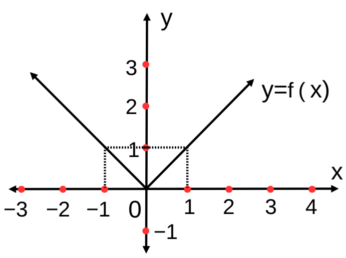
y=f(x)±k çizimi y ekseninde ötelemeler

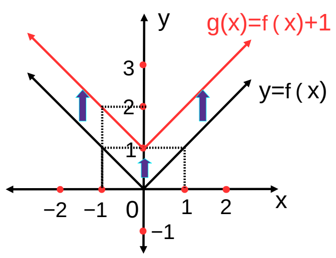
a) y=f(x) fonksiyonu verildiğinde $k\in\mathbb{R}^+$ olmak üzere, y=f(x)+k fonksiyonunu çizmek için y=f(x) fonksiyonun grafiği O_y ekseninde k birim yukarı yönde ötelenir.

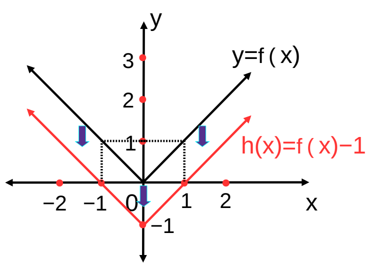
b) y=f(x) fonksiyonu verildiğinde $k\in\mathbb{R}^+$ olmak üzere, y=f(x)−k fonksiyonunu çizmek için y=f(x) fonksiyonun grafiği O_y ekseninde k birim aşağı yönde ötelenir.

Örnek...3 :

y=f(x) grafiği veriliyor. Bu fonksiyon referans alınarak y=g(x)=f(x)+1 ve y=h(x)=f(x)−1 grafikleri çizilmiştir, inceleyiniz.

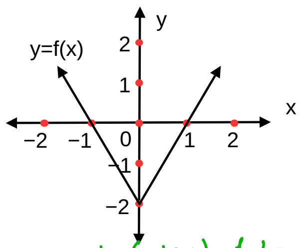






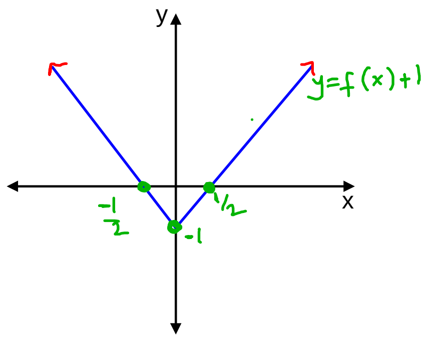
Örnek...4 :

y=f(x) veriliyor.
Buna göre, şıklarda verilen ifadelerin grafiklerini çiziniz.

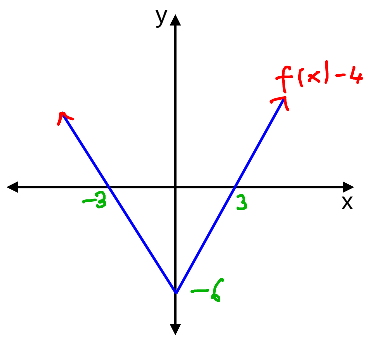


a) $y=f(x)+1$

y=f(x) y eksenine paralel pozitif yönde (yukarı) 1 br ötelenir



b) $y=f(x)-4$ y=f(x) 4br aşağı yönde ötelenir



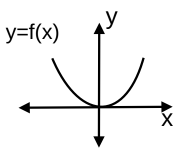
$y=f(x\pm k)$ çizimi x ekseninde ötelemeler

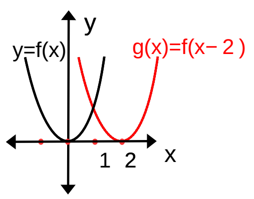
a) y=f(x) fonksiyonu verildiğinde $r\in\mathbb{R}^+$ olmak üzere, y=f(x−r) fonksiyonunu çizmek için y=f(x) fonksiyonun grafiği O_x ekseninde r birim sağ yönde ötelenir.

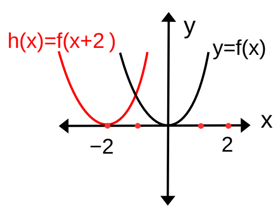
Şekilde f(x) , f(x−2) ve f(x+2) fonksiyonları verilmiştir. İnceleyiniz

Örnek...5 :

y=f(x) grafiği veriliyor.
Bu fonksiyon referans alınarak y=g(x)=f(x−2) ve y=h(x)=f(x+2) grafikleri çizilmiştir, inceleyiniz.

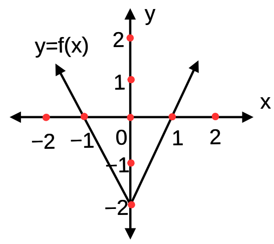






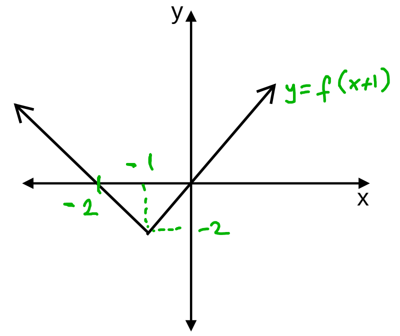
Örnek...6 :

y=f(x) veriliyor.
Buna göre, şıklarda verilen ifadelerin grafiklerini çiziniz

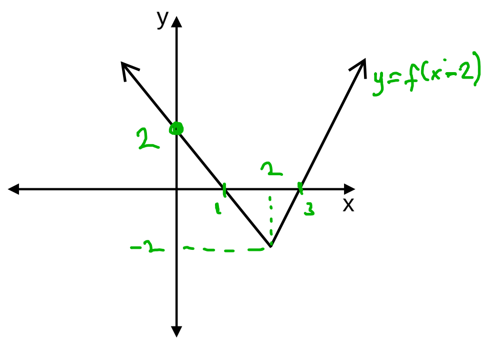


a) $y=f(x+1)$

y=f(x) 1 br sola ötelenir



b) $y=f(x-2)$ y=f(x) 2br sağa ötelenir

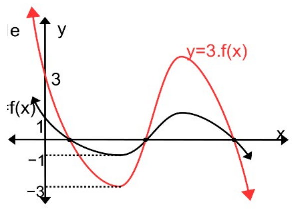


$y=f(x)$ verildiğinde $y=a.f(x)$ çizimi

Eğer (x, y) noktası y=f(x) üzerinde bir noktaysa y=a.f(x) fonksiyonu (x, a.y) noktasını grafiğinde bulunduracaktır. Bu ise aşağıdaki özel durumları oluşturur.

Durum1 a>1

y=f(x) verildiğinde a>1 koşuluyla verilen y=a.f(x) fonksiyonu y =f(x) fonksiyonunun dikey genişletilmişi uzatılmışıdır.

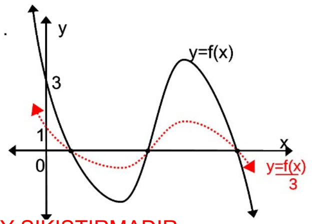


(Şeklin x eksenini kestiği nokta haricinde x ekseninden uzaklaştığını fark ediniz)

Burada yapılan işleme a kat DIKEY GERME diyoruz

Durum 2 0<a<1 dikey SIKIŞTIRMA

y=f(x) verildiğinde 0<a<1 koşuluyla verilen y=a.f(x) fonksiyonu y =f(x) fonksiyonunun dikey daraltılmışıdır.

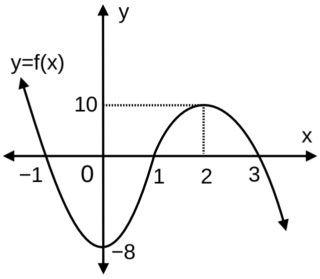


Yapılan işlem 1/a kat DIKEY SIKIŞTIRMADIR

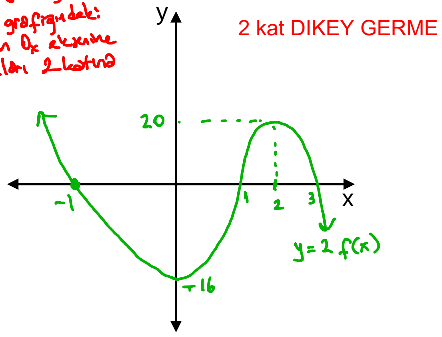
Genel olarak a>0 için y=f(x) grafiğinden y=a.f(x) elde edilirken fonksiyonun sıfırı (x ekseni kesim noktası), tanım kümesi, işareti, artanlık–azalanlığı bire birliği değişmeyen nitelikleridir. Fonksiyonun y eksenini kestiği nokta, görüntü kümesi, maksimum ve minimum noktaları fonksiyonuna göre (ya da duruma göre) değişebilir niteliklerdir.(Bu niteliklerin mutlaka değişmesi gerekmez)

Örnek...7 :

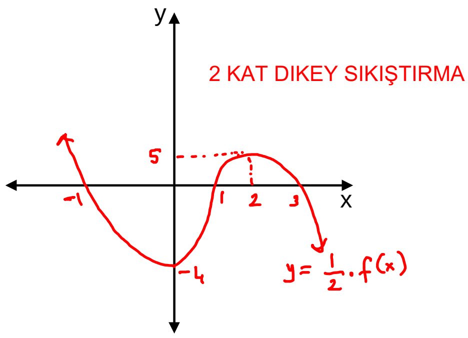
Şekilde verilen y=f(x) fonksiyonu için
a) 2.f(x)
b) $\frac{1}{2}.f(x)$
fonksiyonlarını çiziniz.



a) 2.f(x) grafiği çizilirken y=f(x) grafiğindeki noktaların Ox eksenine uzaklıkları 2 katına çıkar.



b)

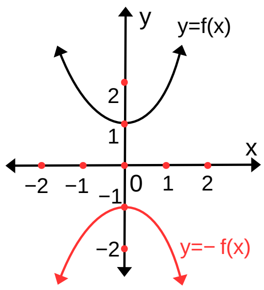


$y=\frac{1}{2}.f(x)$ çizilirken, y=f(x) grafiğindeki noktaların Ox eksenine uzaklıkları yarıya düşer.

y=f(x) verildiğinde y=−f(x) çizimi

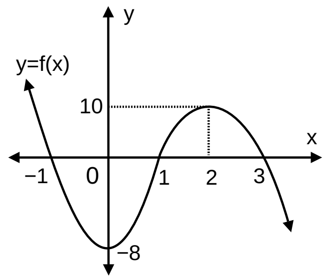
y=f(x) fonksiyonu verildiğinde, y=−f(x) fonksiyonunu çizmek için y=f(x) fonksiyonun grafiği O_x eksenine göre simetriği alınır. (grafiği x eksenine göre katlarız)

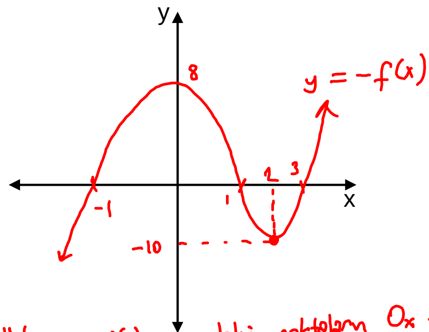
Şekli inceleyiniz



Örnek...8 :

Şekilde verilen y=f(x) fonksiyonu için y=−f(x) fonksiyonunu çiziniz



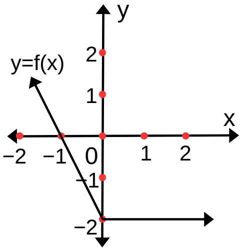


y=−f(x) çizilirken, y=f(x) üzerindeki noktaların Ox eksenine göre simetrikleri alınır. (Şekil x eksenine göre katlanır)

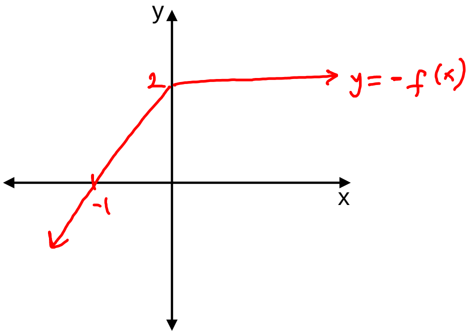
Genel olarak g(x)=a.f(x) (a<0) fonksiyonu çizilirken
Adım1. |a|f(x) fonksiyonu çizilir (genişletme/daraltma)
Adım 2 birinci adımda çizilen fonksiyonun x eksenine göre simetriği alınır.
(Alternatif olarak önce simetri alıp sonra |a| sayısı ile genişletme/daraltma uygulanabilir.)

Örnek...9 :

Şekilde y=f(x) grafiği verilmiştir. Buna göre
i) y=−f(x)
ii) y=−2f(x)
grafiklerini çiziniz.



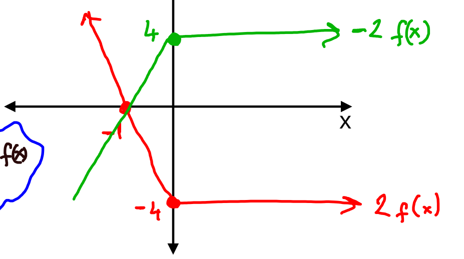
i) f(x) x eksenine göre katlanır.

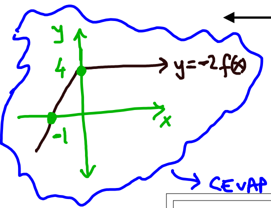


önce 2 kat dikey germe sonra x eksenine göre yansıma

Ⓐ1 önce 2f(x) [uzaklıklar 2 katına çıkar]
Ⓐ2 sonra O_x'de katlama

ii)





f(x)=a·g(x−r)+k biçimindeki fonksiyonları y=g(x) referans fonksiyonundan çizerken (r>0,k>0,a>0) istenilen
Adım 1 y=g(x) r birim sağa

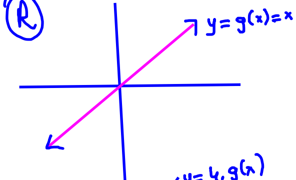
Adım 2 bir önceki adımda elde edilen fonksiyona a çarpanına göre daraltma genişletme uygulanır.

Adım 3 bir önceki adımda elde edilen fonksiyon k birim yukarı ötelenir (kaydırılır). **[dönüşüm sırasıyla r,a,k harfleri sırasına göre yapılır**
Uyarı: a<0 için O_x de simetri , r<0, k<0 olması durumuda ötelemelerin yukarıdaki yönlerin tersine olacağını unutmayınız.

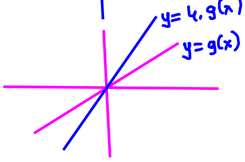
Örnek...10 :

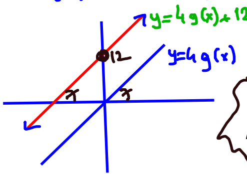
f(x)=4x+12 fonksiyonunun grafiğini y=g(x)=x fonksiyonunu referans alarak çiziniz.
(çözümünüzde önce y=g(x) çizilmeli sonra f(x) fonksiyonu y=g(x) türünden yazılarak ,dönüşümlerle elde edilmelidir)

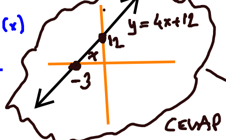
referans
Ⓡ



f(x)= 4 g(x)+12 (açılır / uzar)
Adım 1 y=g(x) dikeyde genişletilir (4 ile çarpım) dikey germe
Adım 2 Adım 1 sonu elde edilen grafik 12 br yukarı ötelenir (kaydırılır)





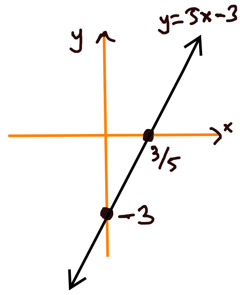


Örnek...11 :

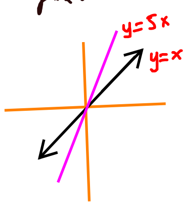
f(x)=5x−3 fonksiyonunun grafiğini
a) iki nokta ile b) referans fonksiyon ile çiziniz.

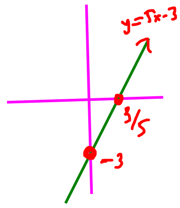
a)

x	y
0	−3
3/5	0



b) x → 5x → 5x−3
dikey germe, dikey genişleme; 3 br aşağı öteleme





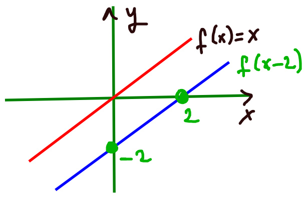
Örnek...12 :

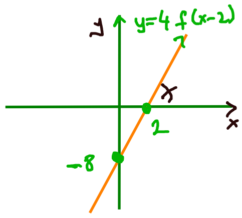
dönüşüm sırası → 2. 1. 3.

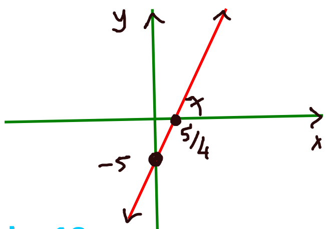
f(x)=x veriliyor. Buna göre , g(x)=4f(x−2)+3 fonksiyonunun grafiğini dönüşümler yoluyla çiziniz. (g(x) kuralını bulmadan)

g(x) elde edilirken y = f(x) sırasıyla 2 br sağa ötelenir, elde edilen grafik dikey genişletilir (çarpan 4) son olarak elde edilen grafik 3 br yukarı ötelenir

4 kat dikey germe





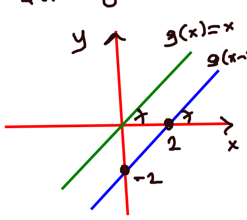


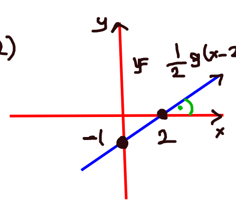
Örnek...13 :

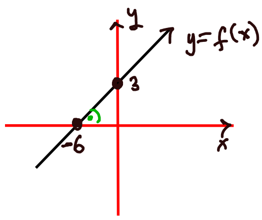
$f(x)=\frac{1}{2}(x-2)+4$ fonksiyonunun grafiğini y=x referans fonksiyonu ile çiziniz.

g(x)=x olsun. İstenen $f(x)=\frac{1}{2}\cdot g(x-2)+4$ olur sırasıyla 2 br sağa, dikeyde daraltma (O_x'e yaklaşma) 4 br yukarı öteleme ile çizim tamamlanır

2 kat dikey sıkıştırma



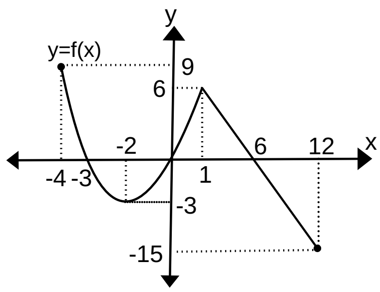




Not x eksenini kestiği noktası için [(−3,0) bulunurken] eğim kullanılabilir ya da denklem çözülebilir! (Açılara dikkat!)

eeg = elde edilen grafik

Örnek...14 :



şekilde y=f(x) fonksiyonunun grafiği veriliyor. Buna istenen grafikleri çiziniz.

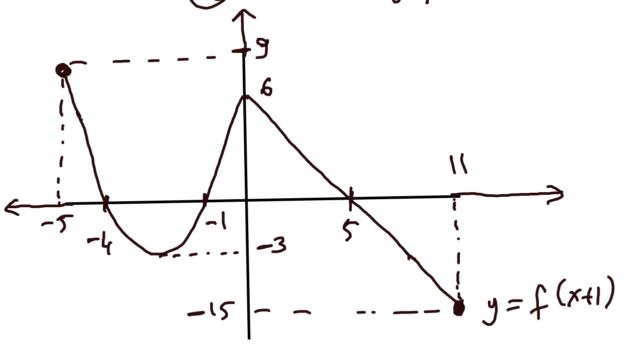
a) $y=2f(x+1)-3$ b) $\frac{-1}{3}f(x-2)-1$

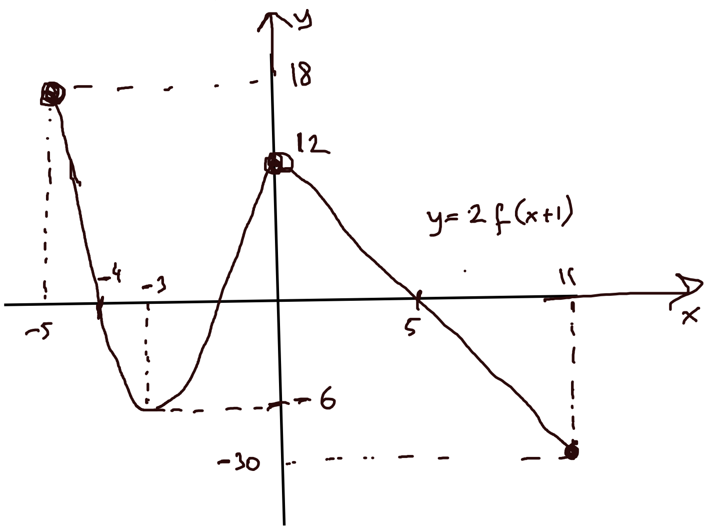
a) $y=2f(x+1)-3$ çizilirken sırasıyla

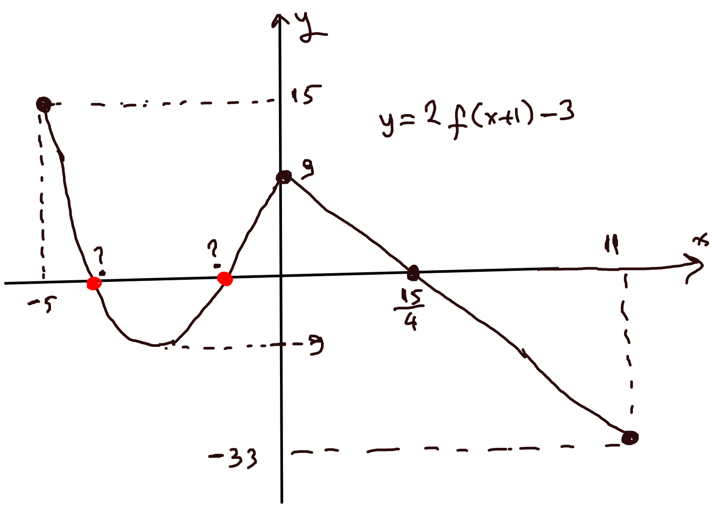
$y=f(x)$ (A1) 1 br sola ötelenir

(A2) Elde edilen grafik dikeyde O_x'den uzaklıkları 2 kat olacak şekilde çizilir (dikeyde şekil gerilir) dikey germe

(A3) Elde edilen grafik 3 br aşağı kaydırılır (ötelenir)







b) $y=-\frac{1}{3}f(x-2)-1$ çizilirken

(A1) $y=f(x)$ 2 birim sağa kaydırılır

(A2) eeg O_x'e yaklaşır (dikeyde daralır) 3 kat dikey sıkıştırma

(A3) eeg O_x'de katlanır

(A4) eeg 1 br aşağı ötelenir.