

POLİNOMLAR -2

DÖRT İŞLEM

POLİNOMLARDA DÖRT İŞLEM

Polinomlarda Toplama ve Çıkarma

P(x) ve Q(x) iki polinom olsun.
P(x) + Q(x) veya P(x) - Q(x) işlemi yapılırken eşit dereceli terimlerin katsayıları işlemine göre toplanır veya çıkarılır.

Örnek...1 :

P(x) = 2x² - 7x + 5 ve Q(x) = 5x² + 4x - 3 polinomları için

a) P(x) + Q(x) b) 3P(x) - Q(x)
işlemlerini yapınız.

$$a) P(x) + Q(x) = 7x^2 - 3x + 2$$

$$b) 3P(x) - Q(x) = 6x^2 - 21x + 15 - 5x^2 - 4x + 3 \\ = x^2 - 25x + 18$$

Örnek...2 :

P(x) bir polinomu için P(x) + P(x+1) = 2x+3 ise P(x+2) polinomunu bulunuz.

$$P(x) = mx + n$$

$$+ P(x+1) = m(x+1) + n = mx + m + n$$

$$2mx + m + 2n = 2x + 3$$

$$m = 1 \quad 1 + 2n = 3 \quad n = 1$$

$$P(x) = x + 1$$

$$P(x+2) = (x+2) + 1 = x + 3$$

Örnek...3 :

P(x) bir polinomu için P(x) + P(x-1) = 2x² - 6x + 7 ise P(1) kaçtır?

$$P(x) = ax^2 + bx + c$$

$$+ P(x-1) = 2x^2 - 2ax + a + b(x-1) + c$$

$$P(x) + P(x-1) = 2ax^2 + x(2b-2a) + a+2c-b = 2x^2 - 6x + 7$$

$$a = 1 \Rightarrow b = -2 \Rightarrow c = 2$$

$$P(x) = x^2 - 2x + 2$$

$$P(1) = 1 - 2 + 2 = 1$$

Polinomlarda Çarpma

iki polinom çarpılırken bir polinomun terimlerinin her biri diğer polinomun terimleri üzerine dağıtılır.

Örnek...4 :

P(x) = 3x + 2 ve Q(x) = x² + 4x - 3 polinomları için a) P(x) · Q(x) b) x · P(x) - 2 · Q(x) işlemlerini yapınız.

$$a) P(x) \cdot Q(x) = (3x+2)(x^2+4x-3)$$

$$3x^3 + 12x^2 - 9x + 2x^2 + 8x - 6 = 3x^3 + 14x^2 - x - 6$$

$$b) xP - 2Q = 3x^2 + 2x - 2x^2 - 8x + 6 \\ = x^2 - 6x + 6$$

Örnek...5 :

P(x) = x⁴ + x³ - 3 polinomu için x · P²(x) polinomunu bulunuz.

$$x(x^4 + x^3 - 3)^2 = x(x^4 + x^3 - 3)(x^4 + x^3 - 3)$$

$$(x^5 + x^4 - 3x)(x^4 + x^3 - 3)$$

$$x^9 + x^8 - 3x^5 + x^8 + x^7 - 3x^4 - 3x^5 - 3x^4 + 9x$$

$$x^9 + 2x^8 + x^7 - 6x^5 - 6x^4 + 9x$$

Örnek...6 :

P(x) = x⁴ + x³ + 3x² - 2x + 2 ve

Q(x) = 2x³ + x² + 4x - 3 polinomları için

P(x) · Q(x) işlemi yapıldığında x² li terimin katsayısı kaç olur?

$$(x^4 + x^3 + 3x^2 - 2x + 2)(2x^3 + x^2 + 4x - 3)$$

$$-9x^2 - 8x^2 + 2x^2 = -15x^2$$

$$\underline{\underline{-15}}$$

POLİNOMLAR -2

DÖRT İŞLEM

Örnek...12 :

$M(x) = x^3 + x - 7$ ve $L(x) = x + 2$ polinomları için $M(x)$ polinomunun $L(x)$ ile bölümünden elde edilecek kalan kaçtır?

İ.401

$$\begin{array}{r|l} x^3 + x - 7 & x + 2 \\ \underline{x^3 + 2x^2} & \\ -2x^2 + x - 7 & \\ \underline{-2x^2 - 4x} & \\ 5x - 7 & \end{array}$$

$M(x) = L(x) \cdot A(x) + K$
 $M(x) = (x+2) \cdot A(x) + K$
 $x = -2 \rightarrow K = M(-2)$
 $= -8 - 2 - 7$
 $= -17$

Örnek...13 :

$P(x) = x^4 - 9x^3 - 7x^2 + 2x - 8$ polinomunun $x - 1$ ile bölümünden kalan kaçtır?

$$x^4 - 9x^3 - 7x^2 + 2x - 8 = (x-1) \cdot A(x) + K$$

$x = 1$
 $1 - 9 - 7 + 2 - 8 = K$
 $-21 = K$

Örnek...14 :

$P(x) = x^{40} - 2x^{39} - 5x^3 + 3x^2 - 3$ polinomunun $x - 2$ ile bölümünden kalan kaçtır

$$x^{40} - 2x^{39} - 5x^3 + 3x^2 - 3 = (x-2) \cdot A(x) + K$$

$x = 2$
 $2^{40} - 2^{40} - 5 \cdot 8 + 3 \cdot 2^2 - 3 = K$
 $-31 = K$

Örnek...15 :

$A(x) = x^4 + mx^3 + 3x + 2$ polinomunun $x + 2$ ile bölümünden kalan 5 ise m kaçtır?

$$x^4 + mx^3 + 3x + 2 = (x+2) \cdot A(x) + 5$$

$x = -2 \Rightarrow 16 - 8m - 6 + 2 = 5$
 $m = 7/8$

Örnek...16 :

$P(x) = x^5 - 4x^3 + 5x + a$ polinomunun bir çarpanı $x + 1$ ise a kaçtır?

$$x^5 - 4x^3 + 5x + a = (x+1) \cdot A(x) + 0$$

$x = -1 \Rightarrow -1 + 4 - 5 + a = 0 \rightarrow a = 2$

Örnek...17 :

$P(x) = x^3 + x^2 - 4x + 2$ ise, $P(x + 2)$ polinomunun $x - 3$ ile bölümünden kalan kaçtır?

$$P(x+2) = (x-3) \cdot A(x) + K \rightarrow K = P(5) \quad (x=3)$$

$P(5) = 5^3 + 5^2 - 5 \cdot 4 + 2 = 132$

Örnek...18 :

$P(x) = x^3 + 8$ olduğuna göre, $P(x + 3)$ polinomunun x ile bölümünden kalan kaçtır?

$$P(x+3) = x \cdot A(x) + K \quad K = P(3) \quad (x=0)$$

$P(3) = 3^3 + 8 = 35$

Örnek...19 :

$(x+3) \cdot P(x) = mx^3 + 27$ olduğuna göre, $P(-3)$ kaçtır?

$x = -3 \Rightarrow 0 = -27m + 27 \quad m = 1$

$$(x+3) \cdot P(x) = x^3 + 27 \Rightarrow P(x) = x^2 - 3x + 9 \quad (\text{bölme ile})$$

$P(-3) = 9 + 9 + 9 = 27$

Örnek...20 :

$P(x) = x^4 + 3x^2 - 8x - 45$ polinomuna kaç eklenirse, elde edilen polinom $x+2$ ile tam bölünür?

$$x^4 + 3x^2 - 8x - 45 + k = (x+2) \cdot A(x) + 0$$

$x = -2$
 $16 + 12 + 16 - 45 + k = 0$
 $k = 1$

Örnek...21 :

$P(x)$ ve $Q(x+3)$ in $x+1$ ile bölümünden kalanlar sırasıyla 1 ve 2 dir. Buna göre, $z \cdot P(3-2x) + Q(4-x)$ polinomu z nin hangi değeri için $x-2$ ile tam bölünür?

$$P(x) = (x+1) \cdot A(x) + 1 \rightarrow P(-1) = 1$$

$$Q(x+3) = (x+1) \cdot B(x) + 2 \rightarrow Q(2) = 2$$

$$z \cdot P(3-2x) + Q(4-x) = (x-2) \cdot C(x) + 0$$

$x = 2 \Rightarrow z \cdot P(-1) + Q(2) = 0 \quad z + 2 = 0$
 $z = -2$

Örnek...22 :

$(x^3 - x) \cdot P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ ise $P(x)$ polinomunun sabit terimi kaçtır?

$$x(x-1)(x+1) \cdot P(x) = x^3 + 2x^2 + bx + c$$

$x = 0 \Rightarrow c = 0$
 $x = 1 \Rightarrow 4a + b + c = 0$
 $x = -1 \Rightarrow -1 + a - b + c = 0$

$c = 0 \quad a = 0 \quad b = -1$

$P(x) = 1 \Rightarrow P(0) = 1$

POLİNOMLAR -2

DÖRT İŞLEM

Örnek...23 :

$P(x)+2.P(-x)=3x^2+6$ olarak veriliyor. $P(x)$ polinomunun x ile bölümünden kalan kaçtır?

$$P(x) = x \cdot Q(x) + k \quad x=0 \Rightarrow P(0) = k$$

$$P(0) + 2P(0) = 6 \rightarrow \underline{P(0) = 2}$$

Örnek...24 :

$P(x) = x^3 - 4x^2 + 3$ polinomunun $x^2 - 4$ ile bölümünden kalan polinomu iki farklı yoldan bulunuz.

I

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 4x^2 + 3 & x^2 - 4 \\ \underline{x^3 - 4x} & \\ -4x^2 + 4x + 3 & \\ \underline{-4x^2 + 16} & \\ 4x - 13 & \leftarrow \text{Kalan} \end{array}$$

II

$$x^3 - 4x^2 + 3 = (x^2 - 4)A(x) + mx + n$$

$$x = 2 \Rightarrow -5 = 2m + n$$

$$x = -2 \Rightarrow -21 = -2m + n$$

$$\begin{array}{r} -5 = 2m + n \\ + \\ -21 = -2m + n \\ \hline -26 = 2n \\ n = -13 \Rightarrow m = 4 \end{array}$$

$4x - 13 = \text{kalan}$

III

$$x^3 - 4x^2 + 3 = (x^2 - 4) \cdot A(x) + K(x)$$

$x^2 = 4$ (sadece en büyük dereceli terim yalnız bırakılır !!)

$$x^2 \cdot x - 4x^2 + 3 = 4x - 13$$

Örnek...25 :

$P(x) = 2x^4 + 5x^3 - x^2 + 1$ polinomunun $x^2 + 4$ ile bölümünden kalan polinomu bulunuz.

$$\begin{array}{r|l} 2x^4 + 5x^3 - x^2 + 1 & x^2 + 4 \\ \underline{2x^4 + 8x^2} & \\ 5x^3 - 9x^2 + 1 & \\ \underline{5x^3 + 20x} & \\ -9x^2 - 20x + 1 & \\ \underline{-9x^2 - 36} & \\ -20x + 37 & \end{array}$$

II. Yol $P(x)$ de $x^2 = -4$ yazarak kalanı sizde 2.yol ile bulunuz

Örnek...26 :

$P(x)$ ve $Q(x)$ birer polinomdur. $\text{der}[P(x) \cdot Q(x)] = 14$ ve $\text{der}[P(x) : Q(x)] = 8$ olduğuna göre $\text{der}[P(x) + Q(x)]$ kaçtır?

$$P(x) = x^a \quad Q(x) = x^b$$

$$\text{der}(P \cdot Q) = a + b = 14$$

$$\text{der}(P : Q) = a - b = 8$$

$$\begin{array}{r} 2a = 22 \\ a = 11 \rightarrow b = 3 \end{array}$$

$$\text{der}(P + Q) = \max \text{der}(P, Q) = 11$$

(derceler farklı !)

(yada $\text{der}(x^{11} + x^3) = 11$)

Örnek...27 :

$P(x)$ ve $Q(x)$ birer polinomdur. $\text{der}[P(x) \cdot Q(x)] = 8$ ve

$\text{der}\left(\frac{P(x^3)}{Q(2x+3)}\right) = 12$ olduğuna göre $\text{der}[P(x)]$ kaçtır?

$$P(x) = x^a \quad \text{der}(P) = a \quad P(x^3) = (x^3)^a \rightarrow \text{der}(P(x^3)) = 3a$$

$$Q(x) = x^b \quad \text{der}(Q) = b \quad Q(2x+3) = (2x+3)^b \rightarrow \text{der}(Q(2x+3)) = b$$

$$\begin{array}{r} 3a - b = 12 \\ a + b = 8 \\ \hline a = 5 \quad b = 3 \end{array}$$

$\text{der}[P] = 5$

Örnek...28 :

$P(x)$ ve $Q(x)$ birer polinomdur.

$\text{der}(P^2(x^3+x+1) \cdot Q(x)) = 25$ ve $\text{der}\left(\frac{P(x^2)}{Q(2x^3+3)}\right) = 5$

olduğuna göre $\text{der}[P(x) - Q(x)]$ kaçtır?

$$P(x) = x^a \quad \text{der}[P^2(x^3+x+1)] = (x^{3a})^2 \rightarrow 6a$$

$$Q(x) = x^b \quad \text{der}[P(x^2)] = (x^2)^a \rightarrow 2a$$

$$\text{der}[Q(2x^3+3)] = (2x^3+3)^b \rightarrow 3b$$

$$\begin{array}{r} 3/ \quad 6a + b = 25 \\ \quad 2a - 3b = 5 \\ \hline 20a = 80 \rightarrow a = 4 \rightarrow b = 1 \end{array}$$

$\text{der}[x^4 - x] = 4$

POLİNOMLAR -2

DÖRT İŞLEM

DEĞERLENDİRME

- 1) $P(x) = x^2 - 3x + 4$ ve $Q(x) = 2x^2 + x$ polinomları için $4P(x) - 2Q(x) = 0$ denkleminin kökü kaçtır?

$$\begin{aligned} 4x^2 - 12x + 16 - 4x^2 - 2x &= 0 \\ -14x + 16 &= 0 \\ x &= \frac{16}{14} = \frac{8}{7} \end{aligned}$$

- 2) $P(x) = x^2 + 3$ polinomu için $P(x+1) - P(x-1) = 0$ denkleminin kökü kaçtır?

$$\begin{aligned} P(x+1) - P(x-1) &= (x+1)^2 + 3 - [(x-1)^2 + 3] \\ &\Rightarrow 4x = 0 \\ x &= 0 \end{aligned}$$

- 3) $L(x) = x^2 + 6x + 2$ polinomları için $L(x+1)$ polinomunun $L(x-1)$ ile bölümünden elde edilecek kalan polinomunu bulunuz.

$$\begin{aligned} L(x+1) &= L(x-1) \cdot 1 + mx + n \\ x=0 \Rightarrow L(1) &= L(-1) + n \\ 1+6+2 &= 1-6+2+n \\ 12 &= n \\ x=1 \Rightarrow L(2) &= L(0) + m+n \\ 4+12+2 &= 2+m+n \Rightarrow m=4 \\ \text{kalan } &4x+12 \end{aligned}$$

Not Bölüm sonucu 1, kalan $mx+n$
aynı derece ve aynı katsayıları 2 polinomu bölüyoruz!
bölün 2^0

- 4) $P(x)$ polinomu $x^2 + x$ ile bölüldüğünde bölüm $x+2$ ve kalan $x-3$ tür. Buna göre, $P(x)$ polinomunu bulunuz

$$\begin{aligned} P(x) &= (x^2 + x) \cdot (x+2) + (x-3) \\ &= x^3 + 3x^2 + 3x - 3 \end{aligned}$$

- 5) $P(x) = x^{13} - 3x^{12} + 5x^3 - 11x - 100$ polinomunun $x-3$ ile bölümünden kalan kaçtır?

$$\begin{aligned} P(x) &= (x-3) \cdot A(x) + K \\ K &= P(3) = \underline{\underline{2}} \quad (\text{işlemleri yapınız}) \end{aligned}$$

- 6) $P(x) = x^4 + 3x^3 - 4x + 1$ olduğuna göre, $P(x+3)$ polinomunun $x+2$ ile bölümünden kalan kaçtır?

$$\begin{aligned} P(x+3) &= (x+2) \cdot A(x) + K \\ x=-2 \Rightarrow P(1) &= K = 1+3-4+1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

POLİNOMLAR -2

DÖRT İŞLEM

- 7) $(x+2).P(x) = mx^4+8x$ olduğuna göre, $P(x-1)$ polinomunun katsayılar toplamı kaçtır?

İstenen $P(0)$

$$x = -2 \Rightarrow 0 = 16m - 16, m = 1$$

$$x = 0 \Rightarrow 2P(0) = 0$$

$$P(0) = 0$$

(not m'yi bulmaya gerek yok!)

- 8) $A(x+2)$ ve $B(x-3)$ polinomlarının $x-2$ ile bölümünden kalanlar sırasıyla -2 ve 3 dir. Buna göre, $k.A(3x-5) + (k-2)B(x-4)$ polinomu k nin hangi değeri için $x-3$ ile tam bölünür?

$$A(4) = -2 \quad B(-1) = 3$$

$$x = 3 \Rightarrow k.A(4) + (k-2)B(-1) = 0$$

$$-2k + 3k - 6 = 0$$

$$k = 6$$

- 9) $P(x) = 4x^3 - 4x^2 + 3$ polinomunun $x^2 + 1 - x$ ile bölümünden kalan polinomu bulunuz.

$$4x^3 - 4x^2 + 3 \mid x^2 - x + 1$$

$$4x^3 - 4x^2 + 4x \mid 4x$$

$$\underline{-4x + 3}$$

- 10) $P(x) = x^3 - x^2 + 3$ polinomunun $x^2 - 5x + 4$ ile bölümünden kalan polinomu bulunuz.

$$x^3 - x^2 + 3 \mid x^2 - 5x + 4$$

$$x^3 - 5x^2 + 4x$$

$$\underline{4x^2 - 4x + 3}$$

$$16x - 13$$

- 11) $P(x)$ polinomunun $x-1$ ile bölümünden kalan 6 , $x+2$ ile bölümünden kalan -4 tür. $P(x)$ polinomunun x^2+x-2 ile bölümünden kalan kaçtır?

$$P(1) = 6, P(-2) = -4$$

$$P(x) = (x^2+x-2).A(x) + mx+n$$

$$x = 1 \Rightarrow m+n = 6 \quad / -$$

$$x = -2 \Rightarrow -2m+n = -4$$

$$-3m = -10$$

$$m = \frac{10}{3} \Rightarrow n = \frac{8}{3}$$

$$mx+n = \frac{10x+8}{3} \quad \checkmark$$

- 12) $P(x)$ polinomunun $(x-2)^2$ ile bölümünden kalan $6x+2$ ise $x-2$ ile bölümünden kalan kaçtır?

$$P(x) = (x-2)^2 . A(x) + 6x + 2 = (x-2)B(x) + K$$

$$\leftarrow x = 2$$

$$12 + 2 = K$$

$$K = 14$$