ASAL SAYI

1 ve kendisinden başka pozitif tam sayı böleni olmayan , 1 den büyük doğal sayılara asal sayı denir. {2, 3, 5, ...}

- 2 den başka çift asal sayı yoktur.
- 2 en küçük asal sayıdır.

Örnek...1 :

n doğal sayı olmak üzere $2^{(2^n)}+1$ biçimindeki sayılara Fermat asal sayıları denir. En çok iki basamaklı Fermat asallarının toplamı kaçtır?

$n=0 \Rightarrow 2^1+1=3$
$n=1 \Rightarrow 2^2+1=5$
$n=2 \Rightarrow 2^4+1=17$
toplam 25
$n=3 \Rightarrow 2^8+1=257 \longrightarrow$ 3 bas

Örnek...2 :

17! + 1 < p ≤ 17! + 13 koşulunu sağlayan kaç p asal sayısı vardır?

aradaki sayılar paranteze alınabilir, dolayısıyla asal olamaz.
örneğin 17!+5 sayısı 5 parentezine alınabilir. 17!+5= 5.x+5 türündedir
5 ve 5 den büyük en az iki farklı çarpanı olduğundan asal olamaz

ARİTMETİĞİN TEMEL TEOREMİ

Aritmetiğin temel teoremi: Birden büyük her tam sayı sonlu sayıda birbirinden farklı asal sayıların çarpımı olarak yazılabilir ve bu yazılış tek türlüdür.

ASAL ÇARPANLARA AYIRMA

1 den büyük bir doğal sayının asal çarpanlarının çarpımı şeklinde yazılmasına sayının asal çarpanlara ayrılması denir.
x, y farklı asallar olmak üzere,

$A=x^m.y^n$

yazımı A'nın asal çarpanlarına ayrılmış biçimidir.
x ve y sayıları A'nın asal çarpanlarıdır.

Örnek...3 :

45 sayısının
a) asal çarpanlarına ayrılmış halini yazınız.
b) pozitif ve negatif bölenlerini yazınız.
c) pozitif bölen sayısını hesaplayınız.

45	3
15	3
5	5
1	

a) $45 = 3^2.5$
b) 1, 3, 5, 9, 15, 45 (ve negatifleri)
c) pozitif bölen sayısı (pbs) = 6

Örnek...4 :

Doğal sayıların pozitif bölen sayısı ile asal çarpanları arasında nasıl bir ilişki vardır?

pozitif bölen sayısı bulunurken sayı asal çarpanlarına ayrılır. Asal bölenlerin kuvvetlerine birer eklenerek elde edilen çarpım sonucu pozitif bölen sayısını verir.

Örneğin $A = x^a.y^b.z^c$ ile

$pbs = (a+1).(b+1).(c+1)$

a+1	b+1	c+1
x^0	y^0	z^0
x^1	y^1	z^1
⋮	⋮	⋮
x^a	y^b	z^c

seçenek sayıları

$A=x^m.y^n$ şeklinde asal çarpanlarına ayrılmış sayının (m+1)(n+1) tane pozitif böleni dolayısıyla 2(m+1)(n+1) tamsayı böleni vardır

Örnek...5 :

Verilen bir A pozitif tam sayısı
$A = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \cdot 7^d \cdot ...$
biçiminde en küçük asal sayıdan başlanarak, hiç bir asal sayı atlanmadan sayının en büyük asal çarpanına kadar olan asal sayıların üslü ifadeleri kullanılarak yazılıyor. Sonra kullanılan asal sayıların üsleri sırayla yazılarak bu sayının kodu oluşturuluyor. Örneğin 35 sayısı 35 = $2^0 \cdot 3^0 \cdot 5^1 \cdot 7^1$ biçiminde yazıldığında bu sayının kodu 0011'dir.
Buna göre
a) 693 sayısının kodu kaçtır?
b) kodu 001102310 olan sayının pozitif bölen sayısı kaçtır? (her bir kuvvetin rakam olduğunu kabul edelim)

a) $693 = 3^2.7.11$

693	3
231	3
77	7
11	11
1	

$2^0.3^2.5^0.7^1.11^1$
Kod : 02011

b) 001102310
$2^0 3^0 5^1.7^1.11^0 13^1 17^3.19^1$
en sağdaki 0 anlamsız, devamı da olsa sayıda o asallar olmadığından 0 olmalı

Örnek...6 :

Şifreli bir yazışmada kullanılan Latin alfabesindeki harfler alfabetik sıralamaya göre 2'den 30'a kadar numaralandırılır. Daha sonra bu sayısal değerler asal çarpanlarına ayrılır ve kullanılan metin aşağıda açıklanan yöntemle şifrelenir:
• Harflerin sayısal karşılıkları yazılır.
• Yazılan sayılar asal çarpanlarına ayrılır.
Asal çarpanları küçükten büyüğe göre soldan sağa doğru çapım biçimde yazılarak sayılar ifade edilir.
• Her bir asal çarpanın kuvveti yanına yazılarak harfin şifreli karşılığı oluşturulur.

Örneğin Pİ kelimesi

P	21	$3^1 7^1$	3171
İ	13	13^1	131

Ve bu şekilde Pi kelimesinin şifrelenmiş hali 3171 131 dir. Buna göre BAAL kelimesini şifreleyiniz.

B	3	3^1
A	2	2^1
L	16	2^4

BAAL = 31 21 21 24

Örnek...7 :

9! sayısını asal çarpanlarına ayırınız

$9! = 2^7 \cdot 3^4 \cdot 5^1 \cdot 7^1$

Örnek...8 :

A, x ve y tam sayılar olmak üzere,

80!=2ˣ.5ʸ.A

ise x ve y en çok kaçtır?

$80! = 2^{78} \cdot 5^{19} \cdot$ gerisi

$x_{maks} = 78$

$y_{maks} = 19$

Örnek...9 :

Sayı	Pozitif bölenleri	Negatif bölenleri
A	1,2,4,x,y,z	a,b,c,-10, -20,d

Bir A sayısının pozitif ve negatif bölenlerinin bazıları verilmiştir. Buna göre $x+y+a+b+c^{+d+z}$ kaçtır?

$5+10+20+(-1)+(-2)+(-5)+(-4) = 23$

2. yol olarak şöyle düşünebiliriz. Pozitif ve negatif bölenlerin toplamı 0 olmalı. görünen sayıların toplamı 1+2+4+(-10)+(-20)=-23 ise görünmeyenlerin toplamı 23 olmalı

Örnek...10 :

45!-1 sayısının sondan kaç basamağı 9 dur?

45! sayısının sondan 0 sayısı ile 45!-1 sayısının sondan 9 saysısı aynıdır.

$45! = 10^n \cdot A$ ($A \in$ INT, n maks soruluyor)

(5'e bakmak yeterlidir)

45! sayısının sondan 10 basamağı 0 olduğundan 45!-1 sayısının onluk yazımında sondan 10 basamak 9 dur.

Örnek...11 :

$360.x=y^2$ eşitliğini sağlayan en küçük x ve y pozitif tam sayılarını bulunuz.

$2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^1 \cdot x = y^2$ (eşitlikte soldaki kuvvetler 2nin katı olmalı.)

$x = 2^1 \cdot 5^1$ (minimum)

$x = 10 \Rightarrow 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2 = y^2$

$y_{min} = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$

EBOB (OBEB)

İkisi birden sıfır olmayan a ve b tam sayılarının ikisini birden bölen en büyük pozitif tam sayıya bu sayıların **en büyük ortak böleni** (EBOB) denir ve EBOB(a,b)=x biçiminde gösterilir.

EBOB bulunurken sayılar asal çarpanlarına ayrılır. Ortak asal çarpanlardan en küçük üslülerin çarpımı bu sayıların EBOB unu verir.

Örnek...12 :

Tabloyu inceleyiniz

Sayı	15	12
Bölenler	1,3,5,15	1,2,3,4,6,12
Katlar	15,30,45,60,75...	12,24,36,48,60,72...
Asal Çarpan Algoritması	15 | 3; 5 | 5; 1	12 | 2; 6 | 2; 3 | 3; 1
Asal Çarpan Ağacı	15 → 3, 5	12 → 2, 6; 6 → 2, 3
Cebirsel Gösterim	$15 = 3^1 \cdot 5^1$	$12 = 2^2 \cdot 3^1$
EBOB	3	
EKOK	$2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^1 = 60$	

Örnek...13 :

240 ve 672 sayılarının EBOB değerini Asal Çarpan Algoritması yöntemiyle bulunuz

240	672	
120	336	2 +
60	168	2 +
30	84	2 +
15	42	2 +
15	21	2 −
15	7	3 +
5	7	5 −
1	7	7 −
	1	

$EBOB(240,672) = 2^4 \cdot 3 = 48$

Örnek...14 :

8, 12, 18 sayılarının EBOB değerini Asal Çarpan Algoritması yöntemiyle bulunuz

8	12	18	2 (+)
4	6	9	2
2	3	9	2
1	3	9	3
	1	3	3
		1	

EBOB (8,12,18) = 2

EBOB ÖZELLİKLERİ

1) EBOB(a,b)=EBOB(b,a)=EBOB(−a,b)

2) EBOB(a,b+c.a)=EBOB(a,b)

3) EBOB(a,b) ⩽ min{|a|,|b|}

4) EBOB(a,b)=1 ise a ile b aralarında asal sayıdır.

Örnek...15 :

96,112,120 litrelik farklı türdeki yağlar birbirlerine karışmayacak şekilde en az sayıda cam şişelere konulacaktır. En az kaç şişe gerekmektedir ?

en az sayıda şişe için en büyük ölçekli şişe gerekir.
en büyük ölçekli şişe hacmi =ebob (96,112,120)

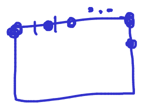
96 112 120 | 2+
48 56 60 | 2+
24 28 30 | 2+
12 14 15 | ⋮

şişe sayısı $\dfrac{96+112+120}{8} = 41$

bir obeb okek probleminde aranan sayı verilenlerden küçükse genel olarak obeb üzerinden düşünmek mantıklıdır.

Örnek...16 :

Boyu 120 metre eni 72 metre olan dikdörtgen biçimli bir arsanın etrafına eşit aralıklarla ve köşelerine birer tane gelecek şekilde ağaç dikilecektir.
Bu iş için en az kaç ağaç gerekir?



en az ağaç için en uzun eşit mesafe gerekir. mesafe=obeb (120 , 72)

120 72 | 8+
15 9 | 3+
5 3 |

obeb = 24

ağaç sayısı $\dfrac{(120+72).2}{24} = 16$

sayıların herbiri 8 e bölünür diye düşünerek 8 le başladık.
tek boyutta çevre , iki boyutta alan üç boyutta hacim ile düşünebiliriz bu tarz sorularda

EKOK (OKEK)

Sıfırdan farklı a ve b tam sayılarının katlarından en küçük olup ortak olanına bu sayıların **En Küçük Ortak Katı** **(EKOK)** denir.

EKOK bulunurken sayılar asal çarpanlarına ayrılır. Ortak asal çarpanlardan en büyük üslüleri ve ortak olmayan çarpanların çarpımı bu sayıların EKOK unu verir.

Uyarı Metin boyunca ebob ile obeb, ekok ile okek aynı anlamlarda kullanılacaktır.

Örnek...17 :

EKOK(36,120)=?

36 120 | 2
18 60 | 2
9 30 | 2
9 15 | 3
3 5 | 3
1 5 | 5
1

$EKOK(36,120) = 2^3.3^2.5^1$
$= 360$

EKOK ÖZELLİKLERİ

1) EKOK(a,b)=EKOK(b,a))

2) EKOK(a,b) ⩾ max{|a|,|b|}

3) EBOB(a,b).EKOK(a,b)=a.b

Örnek...18 :

x,y,z birbirlerinden farklı asal sayılardır.

$A=x^2 \cdot y \cdot z^3$
$B=x \cdot y^3 \cdot z^2$ olduğuna göre,
$C=x^4 \cdot z$

$\dfrac{EKOK(A,B,C)}{OBEB(A,B,C)}$ ifadesinin eşitini bulunuz

$\dfrac{x^4 . y^3 . z^3}{x . z} = x^3 y^3 . z^2$

Örnek...19 :

Biri 18 dakikada, diğeri 24 dakikada çalan iki alarm saat 07.20 de beraber çaldıktan sonra aynı gün en erken saat kaçta tekrar çalar?

aranan süre için 24 ve 18 im katı olacağından ekok ile başlayalım

18 24 | 2
9 12 | 2
9 6 | 2
9 3 | 3
3 1 | 3
1

$ekok = 2^3 . 3^2 = 72'$

07,20
+ 1,12
08,34

Örnek...20 :

A, a,b,c birer doğal sayıdır.
$A=24 \cdot a+2=15 \cdot b+2=18 \cdot c+2$ olduğuna göre , 1000 den küçük en çok tane A değeri vardır?

$A-2 = 24a = 15b = 18c$

A-2 24, 15, 18 in ortak katıdır.

okek (24,15,18) = $2^3 . 3^2 . 5 = 360$

24 15 18 | 2
12 15 9 | 2
6 15 9 | 2
3 15 9 | 3
1 5 3 | 3
5 1 | 5
1

$A-2 = 360.p$ $(p \in \mathbb{Z})$

$A = 360.p + 2$
0,1,2

$A \in \{2, 362, 722\}$
3 değer

Örnek...21 :

Meriç elindeki cevizleri 3 erli 5erli ve 8 erli saydığında her seferinde 2 cevizi artıyor. 500 den fazla cevizi olan Meriç'in elinde en az kaç ceviz vardır?

$C = 3x+2 = 5y+2 = 8z+2$

$C-2 = 3x = 5y = 8z$

$C-2 = k.\text{okek}(3,5,8) = k.120$

$C = 120k+2 \rightarrow k=4 \Rightarrow C_{\text{ceviz sayısı}} = 482$

Örnek...22 :

1000 den en küçük hangi doğal sayıyı çıkarırsak elde edilen sayı 12 ve 15 e tam olarak bölünür?

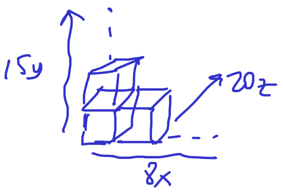
$\underbrace{1000-x}_{\text{12 ve 15 in katı}} = 12a = 15c$ okek (12,15) = 60

$1000-x = 60.n \rightarrow x=40, \; n=16$

40 çıkarılmalı

Örnek...23 :

Boyutları 8 cm,15 cm ve 20 cm olan tuğlalar kullanarak hacmi en küçük ve içi dolu bir küp yapılmak isteniyor. En az kaç tuğla kullanılır?



1 kenar = k. okek (8,15,20)

1 kenar = 120k

$\text{tuğla sayısı} = \dfrac{120.120.120}{8.15.20}$

$= 15.8.6$

$= 720$ adet

Örnek...24 :

EKOK(A,B)=120 ve EBOB(A,B)=6 ise A+B kaç olabilir?

$A = 6k_1$

$B = 6k_2$

$A.B = \text{ekok}(A,B).\text{obeb}(A,B)$

k_1 ve k_2 aralarında asal olmalı

$6k_1.6k_2 = 120.6$

$k_1.k_2 = 20$

k_1	k_2
1	20
4	5
5	4
20	1

A	B	A+B
6	120	126
24	30	54
30	24	
120	6	

Örnek...25 :

En büyük ortak böleni 24 olan birbirinden farklı 3 sayının toplamı en az kaçtır?

$\text{obeb}(x,y,z) = 24$

$x = 24k_1 \quad y = 24k_2 \quad z = 24k_3$

$x = 24$

$y = 48$

$+ \; z = 72$

$x+y+z = 144$

Örnek...26 :

En küçük ortak katları 80 olan birbirinden farklı 3 sayının toplamı en çok kaçtır?

$\text{okek}(x,y,z) = 80 \rightarrow x = \dfrac{80}{1} \quad y = \dfrac{80}{2}$

$z = \dfrac{80}{4}$

$x = 80$

$y = 40$

$+ \; z = 20$

$x+y+z = 140$

Örnek...27 :

6 ve 15 günde bir aynı limandan sefere çıkan iki gemi Pazar günü beraber sefere çıkmışlardır. Buna göre 10.defa beraber sefere hangi gün çıkarlar?

$1 \xrightarrow{1.} 2 \xrightarrow{2.} 3 \ldots \xrightarrow{9.} 10$

10. sefere kadar $\underline{\underline{9}}$ tane periyot geçer.

okek (6,15) = 30

geçen gün sayısı $30.9 = 270$

$270 \div 7$: bölüm 38, kalan 4

Pazar + 4 gün sonrası = perşembedir.

Örnek...28 :

x ve y aralarında asal sayılardır.

EKOK (x,y)=840 ve $y = \dfrac{48}{x} + 33$ olduğuna göre y kaçtır?

$\text{ekok}(x,y) = x.y$ olur

$xy = 48 + 33x$

$840 = 48 + 33x$

$x = 24$

$y = \dfrac{48}{24} + 33$

$y = 35$