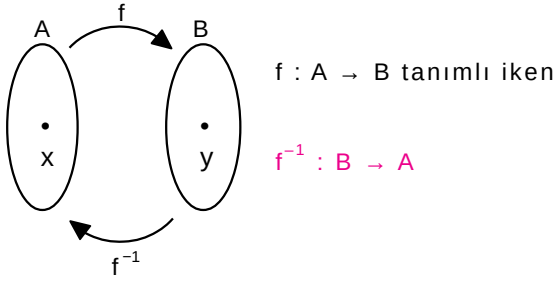


TERS FONKSİYON :

Bir fonksiyonun tersinin de fonksiyon olabilmesi için bu fonksiyonun bire bir (1-1) ve örten olması gerekir.

Bir fonksiyon ile tersi 1. açıortay doğrusuna göre simetriktir.



$y = f(x)$ ise $x = f^{-1}(y)$ dir.

TERSİNİ BULMA KURALI (GENELLEME)

Bir fonksiyonun tersini; **x yerine y, y yerine x yazıp bu yeni y'yi çekerek elde ettiğimiz x' li ifade ile buluruz.**

Örnek...1 :

$f(x) = 3x + 7$ fonksiyonunun tersini bulunuz?

$$y = 3x + 7 \quad x = \frac{y - 7}{3}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{x - 7}{3}$$

Örnek...2 :

$f: \mathbb{R} - \left\{ \frac{5}{2} \right\} \rightarrow \mathbb{R} - \left\{ \frac{3}{2} \right\}$, $f(x) = \frac{3x+2}{2x-5}$ fonksiyonunun tersini bulunuz?

$$y = \frac{3x+2}{2x-5}$$

$$2xy - 5y = 3x + 2$$

$$x(2y - 3) = 5y + 2$$

$$x = \frac{5y + 2}{2y - 3}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{5x + 2}{2x - 3}$$

Örnek...3 :

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ fonksiyonunun tersini bulunuz?

$$y = (x+1)^3$$

$$\sqrt[3]{y} = (x+1)$$

$$x = \sqrt[3]{y} - 1$$

$$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x} - 1$$

Örnek...4 :

$f: (-6, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ $f(x) = x^2 + 12x + 36$ fonksiyonunun tersini bulunuz?

$$y = (x+6)^2$$

$$\sqrt{y} = |x+6| = x+6$$

$$\sqrt{y} - 6 = x$$

$$f^{-1}(x) = \sqrt{x} - 6$$

Örnek...5 :

$f: (-\infty, 4) \rightarrow (-10, \infty)$ $f(x) = x^2 - 8x + 6$ fonksiyonunun tersini bulunuz?

$$y = (x-4)^2 - 10$$

$$\sqrt{y+10} = |x-4| = -x+4$$

$$x = \sqrt{y+10} + 4$$

$$f^{-1}(x) = \sqrt{x+10} + 4$$

www.matbaz.com

Örnek...6 :

Negatif reel sayılardan pozitif reel sayılara tanımlı $f(x) = x^2$ fonksiyonunun tersini bulunuz?

$$y = x^2 \rightarrow |x| = \sqrt{y}$$

$$-x = \sqrt{y}$$

$$x = -\sqrt{y} \rightarrow f^{-1}(x) = -\sqrt{x}$$

PRATİK KURALLAR :

- 1) $f(x) = ax + b$ ise $f^{-1}(x) = \frac{x-b}{a}$ dir.
- 2) $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ ise $f^{-1}(x) = \frac{-dx+b}{cx-a}$ dir.

Örnek...7 :

Aşağıdaki fonksiyonların tersini uygun şartlarda bulunuz ?

$$f(x) = 2x + 5$$

$$f^{-1}(x) = \frac{x-5}{2}$$

$$f(x) = 5x - 137$$

$$f^{-1}(x) = \frac{x+137}{5}$$

$$f(x) = 9x$$

$$f^{-1}(x) = x/9$$

$$f(x) = 7$$

↳ tersi yoktur

$$f(x) = \frac{3x+7}{2x+5}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{-5x+7}{2x-3}$$

$$f(x) = \frac{x+2}{3x-5}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{5x+2}{3x-1}$$

$$f(x) = \frac{7-4x}{2x-8} = \frac{-4x+7}{2x-8}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{8x+7}{2x+4}$$

$$f(x) = \frac{7x+2}{3+2x} = \frac{7x+2}{2x+3}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{-3x+2}{2x-7}$$

$$f(x) = \frac{4x-1}{5x+4}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{-1}{5x-4}$$

$$f(x) = \frac{0x+5}{2x-3}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{3x+5}{2x}$$

Örnek...8 :

$f: \mathbb{R} - \{6\} \rightarrow \mathbb{R} - \{2\}$

payda'nın kökü

$$f(x) = \frac{ax + \sqrt{3}}{3x - b}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{bx + \sqrt{3}}{3x - 2}$$

ifadesi bire bir (1-1) ve örten bir fonksiyon ise $a+b$ toplamı kaçtır?

$$3 \cdot 6 - b = 0$$

$$b = 18$$

$$6 - 2 = 0$$

$$a = 6$$

$$18 + 6 = 24$$

Örnek...9 :

Uygun koşullarda $x = \frac{3f(x)+5}{f(x)+2}$ fonksiyonu veriliyor.

Buna göre, $f(0) + f^{-1}(0)$ toplamı kaçtır?

$$x = \frac{3y+5}{y+2}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{3x+5}{x+2}$$

$$f(x) = \frac{-2x+5}{x-3}$$

$$f(0) + f^{-1}(0) = \frac{5}{2} - \frac{5}{3} = \frac{5}{6}$$

Örnek...10 :

Uygun koşullarda $f(x) = \frac{f(x)-x}{x+4}$ fonksiyonu veriliyor.

Buna göre, $f(x)$ fonksiyonunu, tanım ve görüntü kümesini bulunuz

$$y = \frac{y-x}{x+4}$$

$$xy + 4y = y - x$$

$$xy + 3y = -x$$

$$y(x+3) = -x$$

$$y = \frac{-x}{x+3}$$

Tanım kümesi $\mathbb{R} - \{-3\}$

Görüntü kümesi $\mathbb{R} - \{-1\}$

$$f^{-1}(x) = \frac{-3x}{x+1}$$

TERS FONKSİYON ÖZELLİKLERİ

- 1) $(f^{-1})^{-1} = f$
- 2) $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = I$
- 3) $f \circ g = I$ ise $f = g^{-1}$ veya $g = f^{-1}$
- 4) $(f_1 \circ f_2 \circ \dots \circ f_n)^{-1} = f_n^{-1} \circ \dots \circ f_2^{-1} \circ f_1^{-1}$
(Ters sırada açılır)

Örnek...11 :

$$(f \circ g^{-1})(x) = \frac{9x-5}{71+\sqrt{3}x} \quad \frac{9x-5}{\sqrt{3}x+71}$$

olduğuna göre, $(g \circ f^{-1})(x)$ fonksiyonunun kuralını bulunuz?

$$(f \circ g^{-1})^{-1} = g \circ f^{-1} = \frac{-71x-5}{\sqrt{3}x-9}$$

Örnek...12 :

$$(f \circ g^{-1})(x) = 2x+5 \quad \text{ve} \quad (g \circ f^{-1})(x) = mx+n$$

olduğuna göre, $m+n$ kaçtır?

$$(f \circ g^{-1})^{-1} = g \circ f^{-1}(x) = \frac{x-5}{2} = mx+n$$

$$\begin{aligned} m &= \frac{1}{2} \\ n &= -\frac{5}{2} \end{aligned} \quad \rightarrow \quad m+n = -\frac{4}{2} = -2$$

Örnek...13 :

$$\begin{aligned} f_1^{-1}(5) &= 1 \\ f_2(4) &= 2 \\ f_3(2) &= 1 \end{aligned} \quad \rightarrow \quad f_2^{-1}(2) = 4 \quad \rightarrow \quad f_3^{-1}(1) = 2$$

olduğuna göre, $(f_1 \circ f_3 \circ f_2)^{-1}(5)$ kaçtır?

$$f_2^{-1} \circ f_3^{-1} \circ f_1^{-1}(5) = 4$$

Örnek...14 :

$$f(x) = \frac{3x+2}{4x-1} \quad \text{ve} \quad (f \circ g)(x) = x$$

fonksiyonları veriliyor.

Buna göre, $(g^{-1})(0)$ kaçtır?

$$g^{-1} = f \quad g^{-1}(0) = f(0) = \frac{2}{-1} = -2$$

Örnek...15 :

h ve g bire bir (1-1) ve örten fonksiyonlar olmak üzere,

$$(h^{-1} \circ g)^{-1}(x) = g^{-1}(x^4 - x^2 + 8)$$

olduğuna göre, $h(\sqrt{5})$ ifadesinin değeri kaç olabilir?

$$\begin{aligned} g^{-1} \circ h(x) &= g^{-1}(x^4 - x^2 + 8) \\ h(x) &= x^4 - x^2 + 8 \\ h(\sqrt{5}) &= (\sqrt{5})^4 - (\sqrt{5})^2 + 8 = 25 - 5 + 8 = 28 \end{aligned}$$

Örnek...16 :

g çift bir fonksiyon ve $(f^{-1} \circ g)(-x) = m \cdot g(x) + n$ ise $f(x) = 2x-3$ ise $m-n$ kaçtır?

$$f^{-1} \circ g(-x) = f^{-1}(g(-x)) = f^{-1}(g(x)) = m \cdot g(x) + n$$

$$f^{-1}(x) = mx+n = \frac{x+3}{2}$$

$$m = \frac{1}{2}$$

$$n = \frac{3}{2}$$

$$m-n = \frac{-2}{2} = -1$$

Örnek...17 :

$f \circ g(x) = 3x-8$ ve $f(x) = 2x+5$ ise $g(x)$ fonksiyonunu bulunuz.

$$f^{-1} \circ f \circ g = g$$

$$\frac{x-5}{2} \circ (3x-8) = g(x)$$

$$\frac{3x-8-5}{2} = g(x) = \frac{3x-13}{2}$$

Örnek...18 :

$f \circ h(x) = 5x+7$ ve $h(x) = 4x+3$ ise $f(x)$ fonksiyonunu bulunuz.

$$f \circ h \circ h^{-1} = f$$

$$5x+7 \circ \left(\frac{x-3}{4}\right) = f$$

$$f(x) = 5 \left(\frac{x-3}{4}\right) + 7 = \frac{5x+13}{4}$$

Örnek...19 :

u ve v birer fonksiyon, $u \circ v(x) = 5x-3$ ve $u(x) = 5x+2$ ise $v^{-1}(x)$ fonksiyonunu bulunuz.

$$u^{-1} \circ u \circ v = v$$

$$\frac{x-2}{5} \circ (5x-3)$$

$$v(x) = \frac{5x-3-2}{5} = x-1$$

$$v^{-1}(x) = x+1$$

Örnek...20 :

$f(3x+2)=18x+9$ ise $f(x)$ fonksiyonu nedir?

$$f(3x+2) = 6(3x+2) - 3$$

$$f(x) = 6x - 3$$

Örnek...21 :

$f(2x-3)=10x-17$ ise $f(x)$ fonksiyonu nedir?

tersi ile birlikte alalım, $\frac{x+3}{2}$ yazalım

$$f\left(\frac{x+3}{2}\right) = 10\left(\frac{x+3}{2}\right) - 17$$

$$f(x) = 5x - 2$$

Örnek...22 :

Uygun şartlarda $f\left(\frac{2x+3}{3x+1}\right) = 10x-17$ ise $f(x)$ fonksiyonu nedir?

tersi $\frac{-x+3}{3x-2}$ yazılır

$$f(x) = 10\left(\frac{-x+3}{3x-2}\right) - 17$$

$$f(x) = \frac{-61x + 64}{3x - 2}$$

Örnek...23 :

$f(x+2)=6x+7$ ve $(g \circ f)(x)=3x+2$ olduğuna göre, $g^{-1}(x)$ fonksiyonunun kuralını bulunuz?

$$f(x) = 6(x-2) + 7 = 6x - 5$$

$$g \circ f \circ f^{-1} = g \Rightarrow 3x + 2 = g\left(\frac{x+5}{6}\right)$$

$$g(x) = 3\left(\frac{x+5}{6}\right) + 2 = \frac{x+9}{2}$$

$$g^{-1}(x) = 6x - 9$$

Örnek...24 :

f ve g bire bir ve örten fonksiyonlar olmak üzere,

$$(f^{-1} \circ g \circ h)^{-1} \circ (f^{-1} \circ g)$$

ifadesinin eşiti nedir?

$$h^{-1} \circ g^{-1} \circ f \circ f^{-1} \circ g$$

I
I

I birim fonksiyon

$$h^{-1} \circ I = h^{-1}$$

Örnek...25 :

$$f^{-1}\left(\frac{2x+6}{3+x}\right) = g(x^3+x)$$

olduğuna göre, $(f \circ g)(10)$ kaçtır?

$$x=2 \Rightarrow g(10) = f^{-1}(2)$$

$$f \circ g(10) = f\left(\frac{g(10)}{f^{-1}(2)}\right) = \frac{f \circ f^{-1}(2)}{I(2)} = \frac{2}{2} = 1$$

Örnek...26 :

$f^n = \underbrace{f \circ f \circ f \circ \dots \circ f}_n$ olarak tanımlansın,

$$f^{-1}(2x+5) = f^3(x^{67}+1)$$

olduğuna göre, $f^4(1)$ kaçtır ?

$$f \circ f^{-1}(2x+5) = f \circ f^3(x^{67}+1)$$

$$2x+5 = f^4(x^{67}+1)$$

$$x=0 \Rightarrow f^4(1) = 5$$