

FONKSİYONLAR – 3

GRAFİK ÇİZİM VE YORUMU

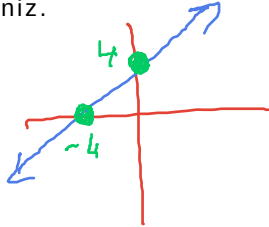
DOĞRUSAL FONKSİYONLARIN GRAFİKLERİ

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere $f(x) = mx + n$ fonksiyonunun grafiği dik koordinat sisteminde $y = mx + n$ doğrusunun grafiğini belirtir. Bir doğrunun grafiğini çizmek için bu doğrunun geçtiği en az 2 noktaya ihtiyaç vardır. $y = mx + n$ denklemini sağlayan en az 2 tane sıralı ikili seçilip bu sıralı ikililer dik koordinat sisteminde işaretlenir ve işaretlenen noktalar bir doğru oluşturacak şekilde birleştirilip doğru çizilir.

Örnek...1 :

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere $f(x) = x + 4$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

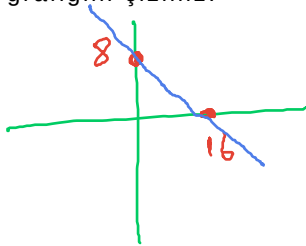
x	y
0	4
-4	0



Örnek...2 :

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere $f(x) = 8 - \frac{x}{2}$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

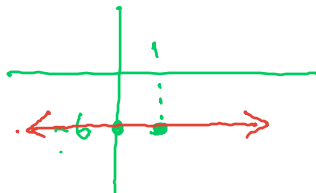
x	y
0	8
16	0



Örnek...3 :

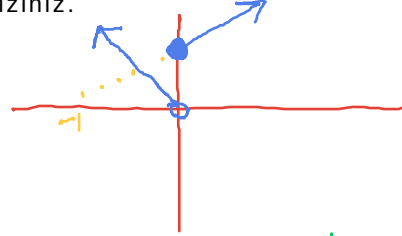
$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere $f(x) = -6$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

x	y
0	-6
1	-6



Örnek...4 :

$f(x) = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x+1, & x \geq 0 \end{cases}$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

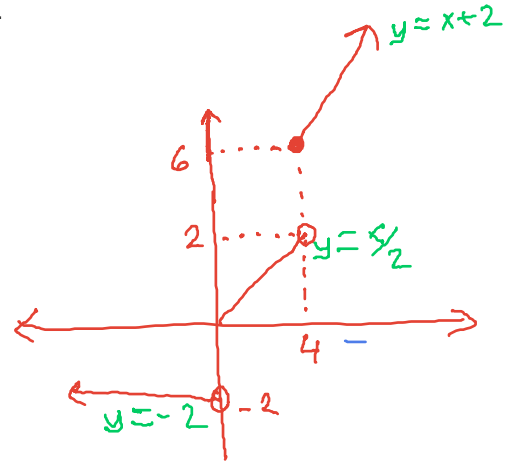


x	y
0	0
1	-1

x	y
0	1
-1	0

Örnek...5 :

$f(x) = \begin{cases} -2, & x < 0 \\ \frac{x}{2}, & 0 \leq x < 4 \\ x+2, & x \geq 4 \end{cases}$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.



Örnek...6 :

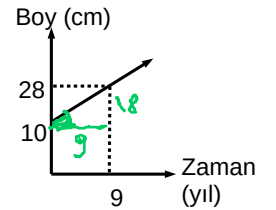
Grafik bir bitkinin boyunun zamana göre değişimini vermektedir buna göre bitkinin boyu kaç yıl sonra 40 cm olur?

$$y = mx + n \quad m = \frac{18}{9} = 2$$

$$(0, 10) \rightarrow n = 10$$

$$y = 2x + 10$$

$$40 = 2x + 10 \rightarrow 2x = 30 \quad x = 15$$

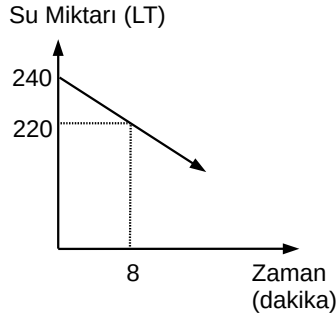


FONKSİYONLAR – 3

GRAFİK ÇİZİM VE YORUMU

Örnek...7 :

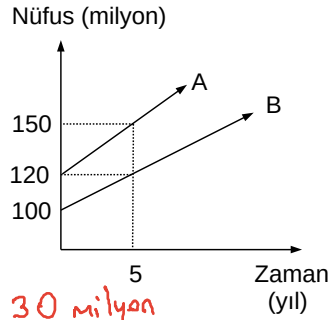
Şekil hacmi 240 litre olan bir havuzun tabanındaki bir musluğun açılmasıyla havuzda kalan su miktarının zamana göre değişimi verilmiştir. Buna göre havuz kaç saatte boşalır?



D.O. 8' 20 LT azalıyor
? x 240 LT ? = 12,8 = 96'
saat 36 dakika

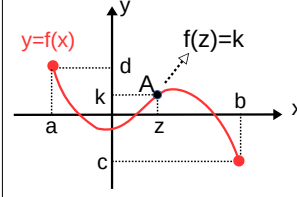
Örnek...8 :

Şekilde A ve B ülkelerinde nüfusun zaman bağlı değişimi verilmiştir buna göre bu iki ülke nüfusu arasındaki fark nüfus sayımı yapılmaya başlandıktan kaç yıl sonra 180 milyon olur?



A 5 yılda 30 milyon
1 yılda 6 ↑
B 5 20
1 yılda 4 ↑
başta 20 milyon fark, her yıl 2 artıyor
 $\frac{180-20}{2} = 80$ yılda

FONKSİYON GRAFİĞİ OKUMA



(z, k) ikilisinin analitik düzlemdeki görüntüsü A noktasıdır.

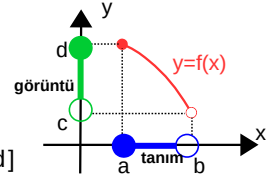
► z sayısına apsis, k sayısına ise ordinat denir.

► A(z, k) noktası y = f(x) fonksiyonunun grafiği üzerinde ise f(z) = k yazılır.

► A(z, k) noktası y = f(x) fonksiyonunun grafiği üzerinde ise $f^{-1}(k) = z$ yazılır. Burada f^{-1} ifadesi f kuralının ters bağıntısıdır (10. sınıfta detaylı olarak işlenecektir) [f(x)=y , $f^{-1}(y) = x$]

► Yukarıda verilen grafikte x değerleri [a,b] aralığından seçildiği için tanım kümesi [a,b] , görüntü kümesi ise [c,d] kümesidir.

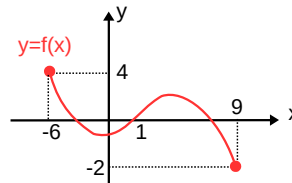
Tanım Kümesi : [a,b]



Görüntü Kümesi : (c,d]

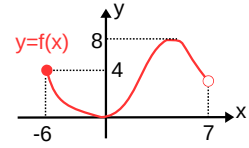
Örnek...9 :

Aşağıda grafikleri verilen fonksiyonların tanım ve görüntü kümelerini yazınız



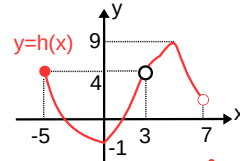
T.K. [-6, 9]

G.K. [-2, 4]



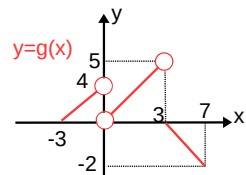
T.K. [-6, 7]

G.K. [0, 8]



T.K. [-5, 7] - {3}

G.K. [-1, 9]



T.K. [-3, 7] - {0}

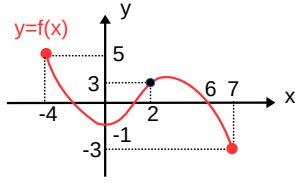
G.K. [-2, 5]

FONKSİYONLAR - 3

GRAFİK ÇİZİM VE YORUMU

Örnek...10 :

Yandaki grafik $y=f(x)$ fonksiyonuna aittir. Buna göre istenilenleri bulunuz?

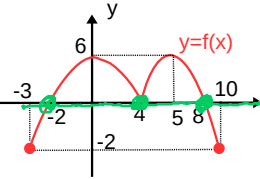


- a) $f(2) = 3$ b) $f(6) = 0$ c) $f(7) = -3$
 d) $f(0) = -1$
 e) fonksiyonun alabileceği en büyük değer = 5

$f(x) = 0$ denkleminin çözüm kümesi $y = f(x)$ denkleminin verilen fonksiyonunun (varsa) x eksenini kestiği noktaların apsisi, $f(x) = 0$ denkleminin gerçek (reel) sayılar kümesindeki çözüm kümesidir.

Örnek...11 :

Yandaki grafik $y=f(x)$ fonksiyonuna aittir. Buna göre istenilenleri bulunuz?



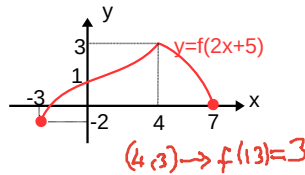
- a) $f(k)=0$ ise k kaç olabilir?
 $k = -2 \checkmark$ $k = 4 \checkmark$ $k = 8$

b) $\frac{f(0)+f(4) \cdot f(9)}{f(-3) \cdot f(5)} = \frac{6 + 0 \cdot f(9)}{-2 \cdot 6} = \frac{6}{-12} = -\frac{1}{2}$

- c) tanım kümesindeki kaç a tamsayısı için $f(a) < 0$ dir? $-3, 9, 10 \rightarrow 3$ değer

Örnek...12 :

Yandaki grafik $y=f(2x+5)$ fonksiyonuna aittir. Buna göre istenilenleri bulunuz?

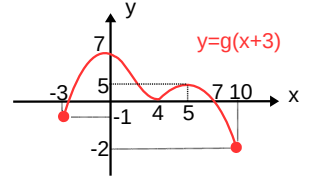


- a) $f(13) = ?$ 3 //

a) $\frac{f(5)+f(-1)}{f(19)-1} = ?$
 $\frac{1+(-2)}{0-1} = \frac{-1}{-1} = 1 //$
 $(0, 1) \rightarrow f(5) = 1$
 $(-3, -2) \rightarrow f(-1) = -2$
 $(7, 0) \rightarrow f(19) = 0$

Örnek...13 :

Yandaki grafik $y=g(x+3)$ fonksiyonuna aittir. Buna göre istenilenleri bulunuz?



a) $g(+3)+g(0) = ?$ 6
 $\frac{7}{7} + \frac{-1}{-1}$

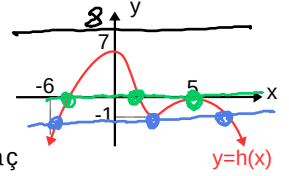
$(0, 7) \rightarrow g(3) = 7$
 $(-3, -1) \rightarrow g(0) = -1$

b) $\frac{g(13)+g(3) \cdot g(0)}{g(7)-2g(8)} = ?$
 $\frac{-2 + 7 \cdot (-1)}{0 - 2 \cdot 5} = \frac{-9}{-10} = \frac{9}{10}$

$(10, -2) \rightarrow g(8) = -2$
 $(0, 7) \rightarrow g(3) = 7$
 $(-3, -1) \rightarrow g(0) = -1$
 $(4, 0) \rightarrow g(7) = 0$
 $(5, 5) \rightarrow g(8) = 5$

Örnek...14 :

Yandaki grafik $y=h(x)$ fonksiyonuna aittir.



- a) $h(x)=0$ denkleminin kaç kökü vardır? 3 kök

- b) $h(x)=-1$ denkleminin kaç kökü vardır? 3 kök

- c) $h(x)=8$ denkleminin kaç kökü vardır? kök yok

yatay çizgiler çizilir. Grafiği kestiği noktalar sayılır

Örnek...15 :

$f(x) = 4x - 28$ fonksiyonunun x eksenini kestiği noktanın apsisi kaçtır?

$y = 0$ $4x - 28 = 0$ $x = 7$

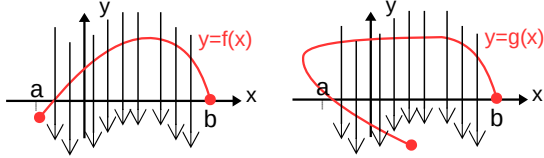
Örnek...16 :

$f(x) = x^2 - ax + b$ fonksiyonunun x eksenini kestiği noktaların apsisi 1 ve -2 olduğuna göre, y eksenini hangi noktada keser?

$y = 0 \Rightarrow x_1 = 1$ $x_2 = -2$
 $1 - a + b = 0$
 $4 + 2a + b = 0$
 $a = -1$ $b = -2$
 $y = x^2 + x - 2$
 $x = 0$ $y = -2$

DÜŞEY DOĞRU TESTİ

Bir grafikte y eksenine çizilen paralel doğrular grafiği birden fazla noktada kesiyorsa o ilişki (eşleme) fonksiyon değildir.



$y=f(x)$, $[a,b]$ tanım aralığı için fonksiyondur. (düşey çizgiler grafiği daima tek noktada kesiyor)

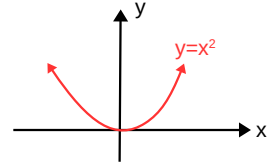
$y=g(x)$, $[a,b]$ tanım aralığı için fonksiyon değildir. (düşey çizgiler grafiği bazen birden fazla noktada kesiyor)

Örtenlik-içinelik İçin Yatay Doğru Testi

Bir fonksiyonun örten mi içine mi olduğunu anlamak için değer kümesinden seçilecek her elemanına karşılık tanım kümesinden bir elemanın eşleşip eşleşmediğini bilmek gerekir. Grafikten bunu anlamanın yolu görüntüsü araştırılacak eleman için için x eksenine paralel bir doğru çizilir ve bu doğrunun grafiği kesip kesmemesine göre karar verilir

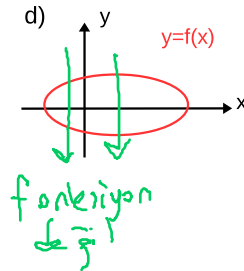
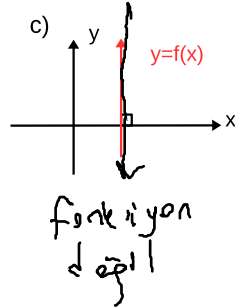
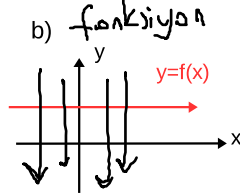
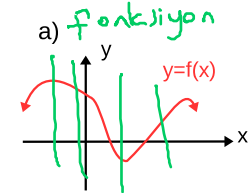
Örnek...18 :

Şekildeki fonksiyonun değer kümesi Reel sayılar kümesi ise fonksiyon içinedir. Eğer değer kümesi $[0, \infty)$ alınırsa fonksiyon örtendir



Örnek...17 :

Hangi grafik bir fonksiyona ait olabilir?

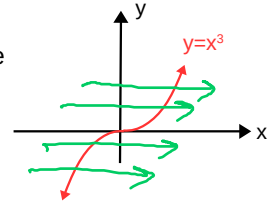


düşey çizgiler grafiği daima tek noktada kesmeli

Örnek...19 :

Şekildeki fonksiyonun Reel sayılar kümesinde fonksiyon mudur?

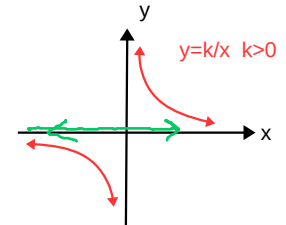
örten f fonksiyondur



Örnek...20 :

Şekildeki fonksiyonun değer kümesi Reel sayılar kümesi ise bu fonksiyon örten midir?

örten değildir. grafik yeşil doğru ile kesilmez (yani 0 değerini almaz)



FONKSİYONLAR – 3

GRAFİK ÇİZİM VE YORUMU

Bire-birlik İçin Yatay Doğru Testi

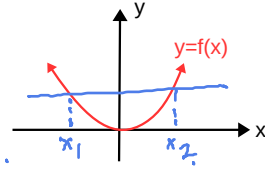
Bir fonksiyonun grafiği ve yatay olarak çizilen farklı doğrular en çok bir defa kesişiyorsa fonksiyon bire bir dir . Yatay doğrular birden çok defa fonksiyon grafiğini kesiyorsa fonksiyon 1-1 değildir.

Örnek...21 :

Reel sayılarda tanımlı $y=f(x)$ fonksiyonu 1-1 midir?

$$f(x_1) = f(x_2)$$

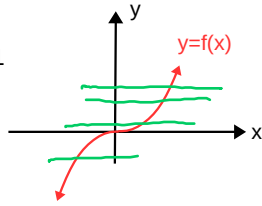
1-1 değil



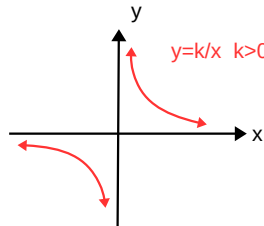
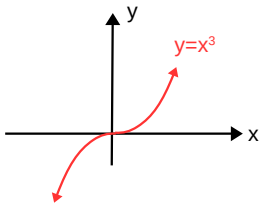
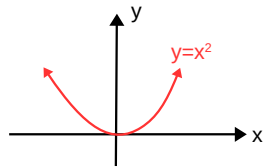
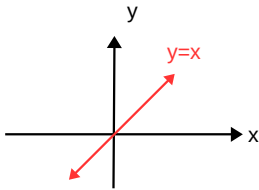
Örnek...22 :

Reel sayılarda tanımlı $y=f(x)$ fonksiyonu 1-1 midir?

1-1 dir
yatay çizgiler
tek noktada kesiyor

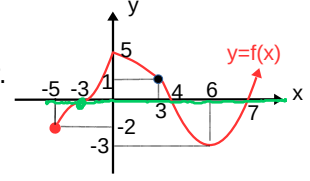


$f(x)=x^n$ fonksiyonlarının grafikleri



DEĞERLENDİRME

- 1) Yandaki grafik $y=f(x)$ fonksiyonuna aittir. Buna göre istenilenleri bulunuz?



- a) $f(x+1)=0$ denklemini sağlayan x değerlerinin toplamı kaçtır?

$$x+1 = -3 \quad x+1 = 4 \quad x+1 = 7$$

$$x_1 = -4 \quad x_2 = 3 \quad x_3 = 6 \rightarrow \sum x = -4 + 3 + 6 = 5$$

b) $\frac{f(3)+f(-5) \cdot f(0)}{f(6)+f(7)} = \frac{1 + (-2) \cdot 5}{-3 + 0} = \frac{-9}{-3} = 3$

- c) Aşağıdaki tanım aralıkları için f bire-bir midir?

i) $[-5,0]$

iii) $[0,7]$

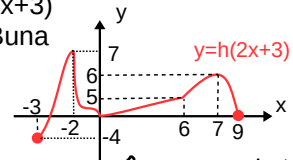
1-1

1-1 değil

- d) $f: [-5, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu örten midir?

değil, -3 den küçük değerleri f almıyor.

- 2) Yandaki grafik $y=h(2x+3)$ fonksiyonuna aittir. Buna göre istenilenleri bulunuz?



$$\frac{h(15)+h(3)}{h(17)-h(21)} = ?$$

$$\frac{5+0}{6-0} = \frac{5}{6}$$

$$(6,5) \rightarrow h(15) = 5$$

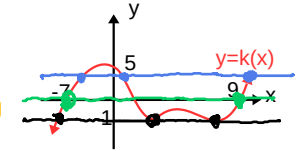
$$(0,0) \rightarrow h(3) = 0$$

$$(7,6) \rightarrow h(17) = 6$$

$$(9,0) \rightarrow h(21) = 0$$

- 3) Yandaki grafik $y=k(x)$ fonksiyonuna aittir.

(kesim noktaları sayıdır)



- a) $k(x)=0$ denkleminin kaç kökü vardır? 2

($f(x)$ in sıfırlarının sayısı kaçtır?)

- b) $k(x)=-1$ denkleminin kaç kökü vardır? 3

- c) $k(x)=4$ denkleminin kaç kökü vardır? 3

- 4) $f(x) = x^2 - 9$ fonksiyonunun x eksenini kestiği noktaların birbirine uzaklığı kaç birimdir?

$$y = 0 \rightarrow x^2 - 9 = 0 \quad x_1 = 3 \quad x_2 = -3$$

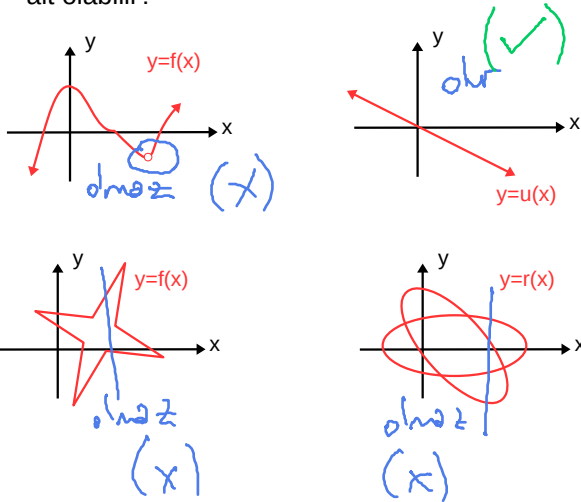
FONKSİYONLAR - 3

GRAFİK ÇİZİM VE YORUMU

- 5) $f(x)=x^2+mx+n$ fonksiyonunun x eksenini kestiği noktaların apsisi -1 ve 2 olduğuna göre, y eksenini hangi noktada keser?

$$\begin{aligned} (-1,0) &\rightarrow 1 - m + n = 0 \\ (2,0) &\rightarrow 4 + 2m + n = 0 \\ 3 + 3m &= 0 \quad m = -1 \\ n &= -2 \\ f(x) &= x^2 - x - 2 = 0 \\ f(0) &= -2 \end{aligned}$$

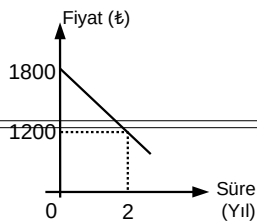
- 6) Hangisi reel sayılarda tanımlı bir fonksiyona ait olabilir?



- 7) $f(x) = \begin{cases} mx+n, & x < 1 \\ -x^2+2n-3, & x \geq 1 \end{cases}$ ve $f(0) = f(2)$ ise $f(3)$ kaçtır?

$$\begin{aligned} f(0) = n &= f(2) = -4 + 2n - 3 \rightarrow n = 7 \\ f(3) &= -9 + 14 - 3 = 2 \end{aligned}$$

- 8) Bir akıllı telefonun üretildiği tarihten itibaren fiyatında ki



değişim grafiği verilmiştir. Akıllı telefonun fiyatı kaçınıcı yılda ilk fiyatının yarısı kadar olur ?

2 yılda 600 ₺ düşüyor
x x 900 düşmeli

$$x = 3 \text{ yıl}$$

- 9) $(x) = |x - 3| - 2$ fonksiyonunu parçalı biçimde yazarak grafiğini çiziniz ?

