

FONKSİYONLAR – 1

KAVRAM VE GÖSTERİM

KAVRAM OLARAK FONKSİYON

"Bir arabanın aldığı yol (x), zamana (t) bağlıdır."
ifadesinin denklem şeklinde yazılışı $x = v \cdot t$ olur.
Bu denklemdeki t bağımsız değişken, x ise bağımlı değişkendir.
Yani zaman ilerledikçe arabanın aldığı yol değişecektir.
Buna göre, arabanın aldığı yol geçen süreye bağlı bir fonksiyondur denir.

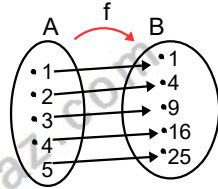
Örnek...1 :

Bir kenarı x birim olan bir karenin alanı x^2 birimkaredir.

Aşağıdaki tabloda x' in bazı değerleri için karenin alanı hesaplanmıştır.

Kenar (x)	1	2	3	4	5
Alan (x^2)	1	4	9	16	25

Buradaki ilişkiyi şema ile gösterirsek



Verilen bu şemaya göre, bağımlı ve bağımsız değişkenleri yazıp, bu kuralı fonksiyon biçiminde belirtiniz?

TANIM

A ve B boş olmayan iki küme olmak üzere A'nın her bir elemanını B'nin bir ve yalnız bir elemanına eşleyen ilişkiye (kurala) A dan B ye fonksiyon denir.

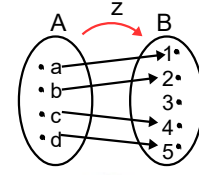
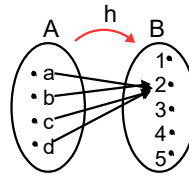
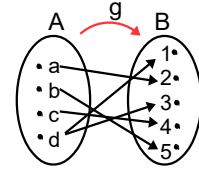
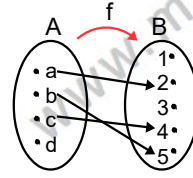
A dan B ye tanımlı bir f fonksiyonu $f:A \rightarrow B$: veya $f:A \rightarrow B, y=f(x)$ biçiminde $x \rightarrow y=f(x)$ gösterilir.

A dan B ye tanımlı f kuralının fonksiyon olması için

- A daki her elemanın görüntüsü olmalı (A da açıkta eleman kalmamalı)
- A daki her elemanın yalnız bir tane görüntüsü olmalı koşulları gerçekleşmelidir.

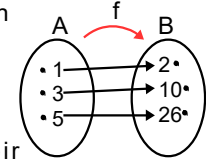
Örnek...2 :

Aşağıda A dan B ye şemaları verilen f, g, h, z eşlemelerinin fonksiyon olup olmadıklarını belirtiniz?



Örnek...3 :

A dan B ye f fonksiyonunun şeması yanda verilmiştir. f fonksiyonunu liste yöntemi, grafik yöntemi ile yazınız. Eşlemeyi bir kural ile yazmak istersek nasıl bir kural yazabiliriz?



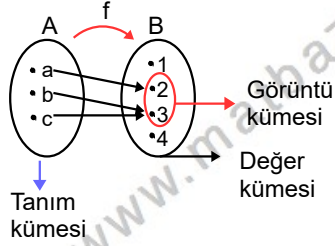
$f:A \rightarrow B$ fonksiyonunda $y = f(x)$ gösteriminde x bağımsız değişkeninin f fonksiyonu ile y bağımlı değişkenine bağlandığı anlaşılır.

FONKSİYONLAR – 1

KAVRAM VE GÖSTERİM

TANIM, DEĞER VE GÖRÜNTÜ KÜMESİ

$f:A \rightarrow B$ fonksiyonunun şeması



olduğuna göre,

$A = \{a, b, c\}$ kümesine fonksiyonun tanım kümesi,

$B = \{1, 2, 3, 4\}$ kümesine fonksiyonun değer kümesi denir.

Bu fonksiyonu liste biçiminde

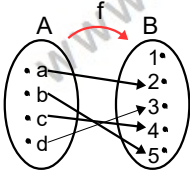
$f = \{(a, 2), (b, 3), (c, 3)\}$ olarak da yazabiliriz.

A'daki elemanların görüntülerinin kümesine görüntü kümesi denir ve $f(A)$ ile gösterilir.

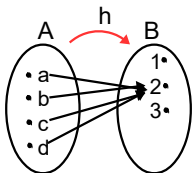
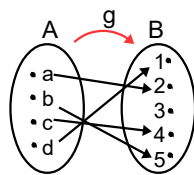
$f(A) = \{2, 3\}$ tür

Örnek...4 :

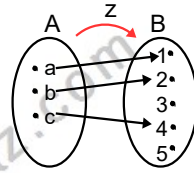
Aşağıda verilen fonksiyonların tanım (T), değer (D) ve görüntü kümelerini (G) yazınız?



T:
G:
D:



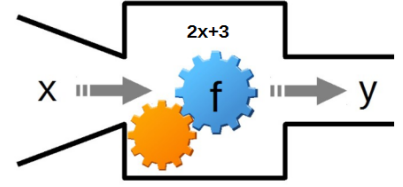
T:
G:
D:



FONKSİYON MAKİNESİ

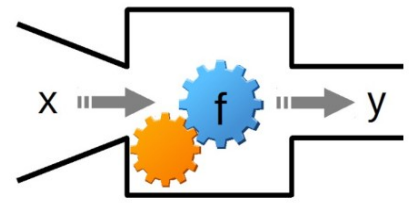
$f:A \rightarrow B$ fonksiyonunda $y=f(x)$ gösteriminde x e girdi y ye ise çıktı denir. Bu işlemi bir fonksiyona benzetirsek

Girdi (x)	Çıktı (y)
1	5
2	7
3	
4	



Örnek...5 :

Girdi (x)	Çıktı (y)
1	6
2	11
3	16
4	21



Şekildeki fonksiyon makinesinin girdi ve çıktıları tabloda veriliyor. Buna göre $f(x)$ in kuralı ne olabilir?

Örnek...6 :

Hangi eşlemeler fonksiyon belirtir?

1) $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$
 $f(x) = x + 3$

2) $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$
 $f(x) = \frac{x}{2}$

3) $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$
 $f(x) = \frac{2x-1}{3}$

4) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $f(x) = \sqrt{x+3}$

FONKSİYONLAR – 1

KAVRAM VE GÖSTERİM

UYARI

Bir fonksiyonun tanım kümesi verilmemişse bağımsız değişken seçilebilecek en geniş reel sayı kümesi düşünülür.

Örnek...7 :

$f(x) = 2x + 3$ ise $f(4)$ kaçtır?

Örnek...8 :

$f(x) = x^2 + 4x - 7$ ise $f(0) + f(1)$ kaçtır?

Örnek...9 :

$f(2x-3) = 4 - 3x$ olduğuna göre, $f(1)$ kaçtır?

Örnek...10 :

$f(x+2) = 5x - 1$ olduğuna göre, $f(6)$ kaçtır?

Örnek...11 :

$f(x^2 + 2x + 6) = 3x^2 + 6x + 20$ olduğuna göre, $f(-3)$ kaçtır?

Örnek...12 :

$f(x) = 3x + 1$ ise $f(2x)$ fonksiyonunun eşiti nedir?

Örnek...13 :

\mathbb{R}' de tanımlı f fonksiyonu, $f(x) = 3x + f(x-1)$ eşitliği ile veriliyor. $f(2) = 2$ olduğuna göre, $f(5)$ değeri kaçtır?

Örnek...14 :

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x+1) = x \cdot f(x)$ eşitliği ile veriliyor. $f(2) = 4$ olduğuna göre, $f(6)$ değeri kaçtır?

FONKSİYONLAR – 1

KAVRAM VE GÖSTERİM

Örnek...15 :

$f(x) = x - 1$ olmak üzere, $f(x+3)$ ün $f(x)$ türünden eşitini bulunuz.

Örnek...16 :

$f(x) = 3x + 2$ olmak üzere, $f(2x-3)$ ün $f(x)$ türünden eşitini bulunuz.

Örnek...17 :

$f: A \rightarrow [0,2,5]$ olduğuna göre A kümesini bulunuz
 $f(x)=x+3$

Örnek...18 :

Aşağıdaki fonksiyonlardan hangisi daima $f(a+b)=f(a).f(b)$ eşitliğini sağlar?

I. $f(x)=3x$ II. $g(x)=x^3$ III. $h(x)=3^x$

BİRİM (ÖZDEŞ) FONKSİYON

Her $x \in A$ için $f : A \rightarrow A$ fonksiyonu $f(x) = x$ ile verilmişse f fonksiyonuna birim fonksiyon denir ve $I(x)=x$ ile gösterilir.
Yani her elemanın görüntüsü birim fonksiyon altında yine kendisidir.

Örnek...19 :

$f : A \rightarrow A$, $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ise $f(x) = x$ fonksiyonu birim fonksiyonunun şemasını çiziniz.

Örnek...20 :

$f(x) = (a + 1)x^2 + (b - 3)x - a + b - c$ biçiminde tanımlanan $f(x)$ birim fonksiyonu için, $f(a.b.c)$ değeri kaçtır?

Örnek...21 :

$f(x^3) = (a+2)x^3 + (b-1)x^2 + c + 2$ fonksiyonu veriliyor.
 f fonksiyonu birim fonksiyon olduğuna göre, $f(a + b - c)$ kaçtır?

SABİT FONKSİYON :

$f : A \rightarrow B$ fonksiyonu için $f(A)$ görüntü kümesi tek elemanlı ise f fonksiyonuna sabit fonksiyon denir.

Yani Her $x \in A$ ve $c \in B$ için $f(x) = c$ ise f sabit fonksiyondur.
 $s(A)=a$, $s(B)=b$ ise A dan B ye en çok b tane sabit fonksiyon tanımlanır.

$f(x) = ax^2 + bx + c$ sabit fonksiyon ise ;
 $a=0$, $b=0$ (sadece x içermeyen terimler kalır)

$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ sabit fonksiyon ise ; $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$,
(eşit dereceli terimlerin katsayıları orantılıdır)

FONKSİYONLAR – 1

KAVRAM VE GÖSTERİM

Örnek...22 :

$A = \{-1, 0, 2, 3\}$ ve $B = \{3\}$ olmak üzere $f : A \rightarrow B$ fonksiyonu nasıl bir fonksiyondur? Şemasını çiziniz.

Örnek...23 :

$f(x) = (a+2)x^2 + (b-3)x + 2a - b$ fonksiyonu sabit fonksiyon olduğuna göre, $f(10)$ kaçtır?

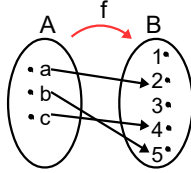
Örnek...24 :

$f(x) = \frac{(m-5n)x+4}{nx-2}$ fonksiyonu sabit fonksiyon olduğuna göre, $\frac{m}{n}$ değeri kaçtır?

FONKSİYON TÜRLERİ

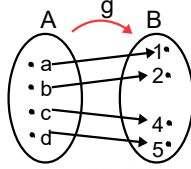
1. İçine Fonksiyon

$f : A \rightarrow B$ fonksiyonu için $f(A) \neq B$ ise f fonksiyonuna içine fonksiyon denir. Yani değer kümesinde açıkta eleman kalıyorsa fonksiyon içinedir.



2. Örten Fonksiyon

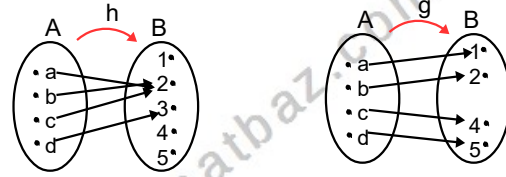
$f : A \rightarrow B$ fonksiyonu için $f(A) = B$ ise f fonksiyonuna örten fonksiyon denir. Yani değer kümesinde açıkta eleman kalmıyorsa fonksiyon örtendir.



3. Bire-bir Fonksiyon

$f : A \rightarrow B$ fonksiyonu verilsin. Her $x_1, x_2 \in A$ ve $x_1 \neq x_2$ için $f(x_1) \neq f(x_2)$ oluyorsa f fonksiyonuna bire-bir (1-1) fonksiyon denir. $s(A)=a, s(B)=b$ ise A dan B ye en çok $P(b,a)$ birebir fonksiyon tanımlanır.

Örnek...25 :



h fonksiyonu tanım kümesinin farklı en az iki elemanını değer kümesinden aynı elemanla eşleştirdiğinden bire-bir değildir. g fonksiyonu ise farklı elemanları farklı görüntülerle eşleştirdiğinden bire-birdir.

Örnek...26 :

Reel sayılarda tanımlı ($f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$) $y=f(x)=x^4$ fonksiyonu 1-1 midir? Değil ise bu fonksiyonun 1-1 hale getirilmesi için mümkün bir yol var mıdır?

DOĞRUSAL FONKSİYON

$f(x) = mx + n$ biçimindeki fonksiyona doğrusal fonksiyon denir.

Doğrusal fonksiyonların grafikleri düzlemde bir doğru belirtir.

Örnek...27 :

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $f(x)$ fonksiyonu doğrusal fonksiyon belirtmektedir. $f(0)=2$ ve $f(-1) = 5$ olduğuna göre, $f(4)$ kaçtır?

Örnek...28 :

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $f(x) = (a+2)x^3 + (b-3)x^2 + a.bx - 2.a + 2.b - d$ eşitliği doğrusal fonksiyon belirtmektedir. $f(-1) = 5$ olduğuna göre, $f(d)$ kaçtır?

FONKSİYONLAR – 1

KAVRAM VE GÖSTERİM

$y=f(x)=mx+n$ doğrusal fonksiyonunda m sayısı doğrunun eğimidir.

Örnek...29 :

En az iki elemanlı bir kümede tanımlı sabit, birim ve doğrusal fonksiyonların bire birliğini araştırınız?

TEK VE ÇİFT FONKSİYONLAR

$f : A \rightarrow B$ olmak üzere ,tanım kümesine ait her x elemanı için

$f(-x) = f(x)$ oluyorsa f fonksiyonuna çift fonksiyon denir.

$f(-x) = -f(x)$ oluyorsa f fonksiyonuna tek fonksiyon denir.

Tek fonksiyonların grafikleri orjine göre, çift fonksiyonların grafikleri y eksenine göre simetriklerdir.

Örnek...30 :

Aşağıda verilen ve gerçekte sayılar kümesinde tanımlı fonksiyonların tek fonksiyon ya da çift fonksiyon olup olmadıklarını belirleyiniz.

$$f(x)=x^3, g(x)=|x|, h(x)=x^2+x$$

Örnek...31 :

$f(x)$ çift bir fonksiyon ve $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $5.f(x)+2.f(-x)=3x^2+1$
biçiminde tanımlı ise $f(0)$ kaçtır?

Örnek...32 :

$f: [a,3] \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x)=(m-2)x^3+(n-3)x^2+(a+n-5)x+2$
fonksiyonu çift fonksiyon ise $f(a)=?$

Örnek...33 :

$f(x)$ tek bir fonksiyon ve $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $4.f(x)+2.f(-x)=3x^3+2x+k-2$
ise $f(k)$ kaçtır?

PARÇALI TANIMLI FONKSİYONLAR

Tanım kümesinin ayrık alt aralıklarında farklı kurallarla ifade edilen fonksiyonlara parçalı tanımlı fonksiyon denir.

$$f(x) = \begin{cases} g(x), & x < a \\ h(x), & x \geq a \end{cases}$$

Örnek...34 :

$f(x) = \begin{cases} x^2+4x+2, & x < 0 \\ -x-5, & x \geq 0 \end{cases}$ ise $f(-3)+f(2)=?$

Örnek...35 :

Reel sayılarda $f(x) = \begin{cases} 2x & x > 2 \\ x+2 & -3 < x \leq 2 \\ -3 & x \leq -3 \end{cases}$ biçiminde tanımlanan fonksiyon için $f(2)-f(3)$ kaçtır?

FONKSİYONLAR – 1

KAVRAM VE GÖSTERİM

Mutlak değer fonksiyonu da parçalı tanımlı bir fonksiyondur

$$|x| = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Örnek...36 :

$g(x) = |x - 3|$ fonksiyonunu parçalı biçimde yazınız?

Örnek...37 :

$g(x) = |2x + 10|$ fonksiyonunu parçalı biçimde yazınız

EŞİT FONKSİYONLAR

$f : A \rightarrow B$, $g : A \rightarrow B$ fonksiyonlarında her $x \in A$ için $f(x) = g(x)$ oluyorsa f ve g fonksiyonları eşittir denir ve $f = g$ yazılır.

Örnek...38 :

$A = \{0, 1\}$, $B = \{1, 2\}$ olmak üzere $f : A \rightarrow B$, $g : A \rightarrow B$ fonksiyonları için $f(x) = x + 1$, $g(x) = x^3 + 1$ biçiminde tanımlanıyor, f ve g eşit fonksiyonlar mıdır?

DEĞERLENDİRME

1) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 3$ fonksiyonu veriliyor. Buna göre, $f(3)$ kaçtır?

2) $f(2x+3) = 5x-7$ olduğuna göre, $f(-5)$ kaçtır?

3) $f(x) = 4x + 3$ ise $f(3x+2)$ fonksiyonunun eşiti nedir?

4) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x+3) = x + f(x+2)$ eşitliği ile veriliyor. $f(3) = 5$ olduğuna göre, $f(17)$ değeri kaçtır?

FONKSİYONLAR – 1

KAVRAM VE GÖSTERİM

5) $f(x) = 2^{x-1}$ olmak üzere, $f(x+3)$ ün $f(x)$ türünden eşitini bulunuz

6) $f = \{(2x-3, 15), (3y, 5), (4, 4)\}$ fonksiyonu veriliyor. f fonksiyonu birim fonksiyon olduğuna göre $x.y$ kaçtır?

7) $f(x) = (a + 1)x^2 + (b - 3)x - a + b$ biçiminde tanımlanan $f(x)$ sabit fonksiyonu için, $f(a.b)$ değeri kaçtır?

8) $f(x) = \frac{(m+1)x^2 - (n+2)x + 4}{3x+5}$ fonksiyonu sabit fonksiyon olduğuna göre, $m.n$ değeri kaçtır?

9) $f: [p, 5] \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = px^3 + (r+2)x^2 + 2x + s - r$ fonksiyonu tek fonksiyon ise $f(1)$ kaçtır?

10) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = (m-2)x^k + (n-3)x^3 + (13-k+n)x + 2$ fonksiyonu çift fonksiyon ise $k+n$ kaçtır?

11) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{7}x^{14} - \sqrt{5}x^{10} - cx^4 + 8x + 4$ ve $f(-3) = 3$ ise $f(3)$ kaçtır?

12) Taksiyle yolculuk yapacak bir kişinin x kilometre yol gittiğinde ödediği ücret ₺ cinsinden $f(x) = \begin{cases} 2x+3,8 & , \quad 0 < x < 5 \\ x+8,8 & , \quad x \geq 5 \end{cases}$ fonksiyonunu ile verilmektedir. Bu taksiyle 8 km yol giden Aslı, 3 km yol giden Beril'den kaç ₺ fazla ücret öder?

13) $f(x) = \begin{cases} x+3, & x < 0 \\ 2x-8, & x \geq 0 \end{cases}$ fonksiyonunu için $f(x) = 0$ denkleminin köklerini bulunuz