

BİNOM AÇILIMI :

x, y birer reel sayı ve n doğal sayı olmak üzere,

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

eşitliğinin sağ tarafına binom açılımı denir.

Örnek...1 :

Aşağıdaki ifadeleri açarak yazınız.

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

$$(m+n)^3 = m^3 + 3m^2n + 3mn^2 + n^3$$

$$(k-y)^3 = k^3 - 3k^2y + 3ky^2 - y^3$$

ÖZELLİKLER

$(a+b)^n$ açılımında

- 1) $(n+1)$ tane terim vardır.
- 2) Açılım a'nın azalan b nin artan kuvvetlerine göre yazılmıştır.

Örnek...2 :

$(1 + 2x)^k$ açılımında 24 terim vardır. x'in azalan kuvvetlerine göre sıralarsak, baştan 3. terimin derecesi kaçtır?

$$k+1=24 \quad k=23$$

$(2x+1)^{23}$ 3. terimde $(2x)^{21}$ var
derece 21

3) Açılımda baştan $(r+1)$. terim $\binom{n}{r}a^{n-r}b^r$ dir.

Örnek...3 :

$(x+2)^{10}$ açılımında terimleri x'in azalan kuvvetlerine göre sıralarsak, baştan 7. terim ne olur?

$$r+1=7 \quad r=6$$

$$\binom{10}{6} x^{10-6} \cdot 2^6 = \binom{10}{6} \cdot 2^6 \cdot x^4$$

Örnek...4 :

$(3x+5)^{14}$ açılımında terimleri x'in azalan kuvvetlerine göre sıralarsak, baştan 7. terim ne olur?

$$r+1=7 \quad r=6$$

$$\binom{14}{6} (3x)^{14-6} \cdot 5^6$$

$$= \binom{14}{6} \cdot 3^8 \cdot 5^6 \cdot x^8$$

Örnek...5 :

$(2x - \frac{1}{x})^9$ açılımında baştan 5. terimin katsayısı ne olur?

$$r+1=5 \quad r=4$$

$$\binom{9}{4} (2x)^{9-4} \cdot \left(-\frac{1}{x}\right)^4$$

katsayı $\binom{9}{4} 2^5$

Örnek...6 :

$(3x-4)^{14}$ açılımında terimleri baştan 9. terimin katsayısı ne olur?

$$r+1=9 \quad r=8$$

$$\binom{14}{8} (3x)^{14-8} (-4)^8$$

katsayı $\binom{14}{8} 3^6 \cdot 4^8$

Örnek...7 :

$(x+2y)^9$ açılımında terimleri y nin artan kuvvetlerine göre sıralarsak, baştan 4. terimin katsayısı ne olur?

$$r+1=4 \quad r=3$$

$$\binom{9}{3} x^{9-3} \cdot (2y)^3$$

katsayı $\binom{9}{3} 2^3$

Örnek...8 :

$(3-2x)^8$ açılımında terimleri x^4 lü terimin katsayısı nedir?

$r+1$ terim olsun $\binom{8}{r} 3^{8-r} (-2x)^r = k \cdot x^4$

$$r=4 \Rightarrow \text{katsayı} \binom{8}{4} 3^4 \cdot (-2)^4$$

Örnek...9 :

$(x+y)^{11}$ açılımında x^5 li terim nedir?

$r+1$. terim $\binom{11}{r} x^{11-r} \cdot y^r = k \cdot x^5$
 $r=6 \Rightarrow$ terim $\binom{11}{6} x^5 \cdot y^6$

Örnek...10 :

$(x+2y)^{10}$ açılımında bir terim $k \cdot x^5 \cdot y^n$ ise $k+n$ kaçtır?

$\binom{10}{r} x^{10-r} (2y)^r = k \cdot x^5 y^n$
 $r=5 \quad n=5$
 $k = \binom{10}{5} 2^5 \quad k+n = \binom{10}{5} 2^5 + 5$

Örnek...11 :

$(2x + \frac{1}{x})^8 = \dots + k \cdot x^4 + \dots$ ise k kaçtır?

$\binom{8}{r} (2x)^{8-r} (\frac{1}{x})^r = k \cdot x^4$
 $8-r-r=4 \rightarrow r=2$ (x kuvvetleri eşittir)
 $k = \binom{8}{2} 2^6$

Örnek...12 :

$(3x - \frac{1}{x})^{12} = \dots + k + \dots$ ise k kaçtır? (k x den bağımsızdır)

$\binom{12}{r} (3x)^{12-r} (\frac{-1}{x})^r = k \cdot x^0$
 $12-r-r=0 \quad r=6$
 $k = \binom{12}{6} 3^6 \cdot (-1)^6$

4) $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$ olduğu için baştan ve sondan eşit uzaklıktaki terimlerin katsayıları eşittir.

5) Katsayılar toplamını bulmak için tüm değişkenler yerine 1 yazılır. Sabit terimi bulmak için yazılabildiği durumda değişkenler yerine 0 yazılır; yazılamadığı durumlarda ise terim açılımında kuvveti 0'a eşitleriz.

Örnek...13 :

$(5x-2y)^6$ nin açılımındaki katsayılar toplamı nedir?

$x=1 \quad y=1 \quad (5-2)^6 = 3^6$

Örnek...14 :

$(5x-2y-z)^6$ nin açılımındaki katsayılar toplamı nedir?

$x=y=z=1 \Rightarrow (5-2-1)^6 = 2^6$

Örnek...15 :

$(x+y+2)^8$ nin açılımındaki sabit terim nedir?

$x=y=0 \Rightarrow 2^8$

Örnek...16 :

$(x + \frac{1}{x})^{16}$ açılımında sabit terim ne olur?

$\binom{16}{r} x^{16-r} (\frac{1}{x})^r = k \cdot x^0$
 $16-r-r=0 \quad r=8$
 terim $\binom{16}{8}$

Örnek...17 :

$(3x^2 - \frac{1}{2x})^9$ açılımında sabit terim ne olur?

$\binom{9}{r} (3x^2)^{9-r} (\frac{-1}{2x})^r = k \cdot x^0$
 $18-2r-r=0 \quad r=6$
 terim $\binom{9}{6} 3^3 \cdot (-\frac{1}{2})^6$

6) $(a+b)^n$ ifadesinin açılımında bir terimin sondan terim numarası ile baştan terim numarası toplamı $(n+2)$ olur. Sondan terimler sorulduğunda terimlerin yerleri değiştirilerek de sorunun çözümü düşünülebilir

Örnek...18 :

$(2x+1)^{13}$ ifadesi x in azalan kuvvetlerine göre açıldığında sondan 3. terim ne olur?

$(1+2x)^{13}$ bastan 3. terim ile aynı
 $r+1=3$
 $r=2$
 $\binom{13}{2} 1^{13-2} \cdot (2x)^2$

$\binom{13}{2} \cdot 2^2 \cdot x^2$

ya da sondan 3 terim bastan 12. terimdir
 $3 + T = 13 + 2 \rightarrow T = 12$

Örnek...19 :

$(x^3-2y)^{10}$ ifadesi x in azalan kuvvetlerine göre açıldığında sondan 7. terim ne olur?

$(-2y+x^3)^{10}$ bastan 7. terim
 $r+1=7$
 $r=6$
 $\binom{10}{6} (-2y)^{10-6} \cdot (x^3)^6$

$\binom{10}{6} 2^4 \cdot x^{18} y^4$

7) $n=2k$ ise açılımda ortanca terim vardır.

Örnek...20 :

$(x+\frac{1}{x})^{16}$ açılınca ortadaki terimin katsayısı ne olur? 17 terimin 9. su ortadadır.

$\binom{16}{8} x^{16-8} \cdot (\frac{1}{x})^8$
 $r+1=9$
 $r=8$

$\binom{16}{8}$

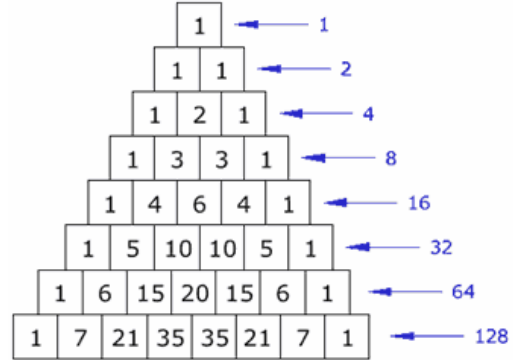
Örnek...21 :

$(x^2-3y)^8$ ifadesi açıldığında ortadaki terim kaçtır?

$\binom{8}{4} (x^2)^{8-4} (-3y)^4$
 $r+1=5$
 $r=4$
 $\binom{8}{4} 3^4 x^8 y^4$

8) $(a+b)^n$ nin açılımındaki katsayılar kombinasyon yerine pascal üçgeni kullanılarak da bulunabilir.

PASCAL ÜÇGENİ



Yukarıdaki Pascal üçgeninden yararlanarak aşağıdaki ifadelerin açılımlarının katsayılarını yazabiliriz.

- $(x+y)^0 = 1$ (Piramitin tepesindeki sayı)
- $(x+y)^1 = 1 \cdot x + 1 \cdot y$ (Piramitin 2. satır sayıları)
- $(x+y)^2 = 1 \cdot x^2 + 2 \cdot xy + 1 \cdot y^2$ (Piramitin 3. satır sayıları)
- $(x+y)^3 = 1 \cdot x^3 + 3 \cdot x^2y + 3 \cdot xy^2 + 1 \cdot y^3$
- $(x+y)^4 = 1 \cdot x^4 + 4 \cdot x^3y + 6 \cdot x^2y^2 + 4 \cdot xy^3 + 1 \cdot y^4$

Örnek...22 :

$(2x+y)^4$ ifadesinin açık şeklini Pascal üçgenini kullanarak yazınız.

$1 \cdot (2x)^4 + 4 \cdot (2x)^3 y + 6 \cdot (2x)^2 y^2 + 4 \cdot (2x) y^3 + y^4$
 $16x^4 + 32x^3y + 24x^2y^2 + 8xy^3 + y^4$

Örnek...23 :

$y = x^3 + 6x^2 + 12x + 12$ olduğuna göre, x in y türünden eşitini bulunuz

$y = (x+2)^3 + 4$
 $y-4 = (x+2)^3$
 $\sqrt[3]{y-4} = (x+2)$
 $x = \sqrt[3]{y-4} - 2$

Örnek...24 :

$y = x^4 + 8x^3 + 24x^2 + 32x + 13$ olduğuna göre, x in y türünden eşitini bulunuz

$y = (x+2)^4 - 3$
 $\sqrt[4]{y+3} = x+2$

$x = \sqrt[4]{y+3} - 2$

DEĞERLENDİRME

- 1) $(x-2y)^n$ ifadesinin açılımda terim sayısı 8 ise katsayılar toplamı kaçtır?

$n+1=8 \quad n=7$
 $x=1 \quad y=1 \Rightarrow (-1)^7 = -1$

- 2) $(2x-1)^{10}$ açılımında baştan 6. terimin kat sayısının sondan 3. terimin katsayısına oranı kaçtır?

$r+1=6 \quad r=5$
 $r+1=3 \quad r=2$
katsayı $\binom{10}{5} 2^5 (-1)^5$ $k = \binom{10}{2} (-1)^{10-2} (2)^2$
Oran $\frac{-\binom{10}{5} 2^5}{\binom{10}{2} 2^2}$

- 3) $(x-y)^{10}$ açılımı x in artan kuvvetlerine göre düzenlendiğinde baştan 3. terimin katsayısının sondan 4. terimin katsayısına oranı kaçtır?

$(-y+x)^{10}$ baştan 3. ve sondan 4. terimler soruluyor
 $r+1=3 \quad r=2$
 $\binom{10}{2} (-y)^{10-2} \cdot (x)^2$
 $(x-y)^{10}$ baştan 4. $r+1=4 \quad r=3$
 $\binom{10}{3} x^{10-3} (-y)^3$
Oran $\frac{\binom{10}{2}}{-\binom{10}{3}}$

- 4) $(3x-2y)^9 = \dots + A \cdot x^k \cdot y^t + \dots$ ise k+t kaçtır?

$\binom{9}{r} (3x)^{9-r} \cdot (-2y)^r$
 $k = 9-r$
 $t = r$
 $k+t = 9$

- 5) $(2x^3 - \frac{3}{2x})^8$ açılımı yapıldığı sabit terim kaç olur?

$\binom{8}{r} (2x^3)^{8-r} (\frac{-3}{2x})^r = k \cdot x^0$
 $24-3r-r=0 \rightarrow r=6$
Terim $\binom{8}{6} 2^2 (\frac{-3}{2})^6$

- 6) $\binom{x}{6} + \binom{x}{7} = \binom{13}{6}$ ise $\binom{x}{0} + \binom{x}{1} \cdot 9 + \binom{x}{2} \cdot 9^2 + \dots + \binom{x}{x} 9^x$ sayısı kaç basamaklıdır?

$\binom{x+1}{7} = \binom{13}{7}$ $(1+9)^x = 10^{12} \rightarrow 13$ bas.
 $x=12$

- 7) $(x - \frac{1}{x})^{10}$ açılımında ortanca terimin katsayısı kaçtır?

11 terimin 6.sı ortodadır $r+1=6 \quad r=5$
 $\binom{11}{5} x^{11-5} \cdot (\frac{-1}{x})^5$
Katsayı $-\binom{11}{5}$

- 8) $(\frac{x^3 \cdot y - x \cdot y^3}{xy^2})^8 = \dots + A \cdot x^k \cdot y^6$ ise $\frac{A}{k}$ kaçtır?

$(\frac{x^2}{y} - y)^8 \rightarrow \binom{8}{r} (\frac{x^2}{y})^{8-r} (-y)^r = A x^k y^6$
 $r=6 \quad k=4$
 $A = \binom{8}{6} (-1)^6 = 28$
 $\frac{A}{k} = \frac{28}{4} = 7$

- 9) $(\sqrt[3]{2} - \sqrt{2})^{20} = a + b \cdot \sqrt{2} + c \cdot \sqrt[3]{2}$ eşitliğinde a, b ve c tam sayılardır. Buna göre a kaçtır?

istenilen sayı irrasyonel olmamalı
 $\binom{20}{r} (\sqrt[3]{2})^{20-r} (-\sqrt{2})^r$ $\frac{20-r}{3} + \frac{r}{2} \in \mathbb{Z}$
 $\frac{40+r}{6} \in \mathbb{Z} \quad r = 2, 8, 14, 20$
 $a = \binom{20}{2} 2^7 + \binom{20}{8} 2^8 + \binom{20}{14} 2^9 + \binom{20}{20} 2^{10}$

- 10) $(x+y+z)^8$ açılımında kaç tane x^4 içeren terim bulunur?

$\binom{8}{r} x^{8-r} (y+z)^r = k x^4 \Rightarrow r=4$
 $(y+z)^4 \rightarrow$ açılıncaya 5 terim olur

- 11) $(x+y+z)^8$ açılımında $x^2 \cdot y^3 \cdot z^k$ lı terimin katsayısı A ise $\frac{A}{k}$ kaçtır?

$(x+y+z)^8 \rightarrow \binom{8}{r} x^{8-r} (y+z)^r$ $r=6$
 $(y+z)^6 = \binom{6}{p} y^{6-p} z^p \rightarrow p=3$
Katsayı $\binom{8}{6} \cdot \binom{6}{3}$