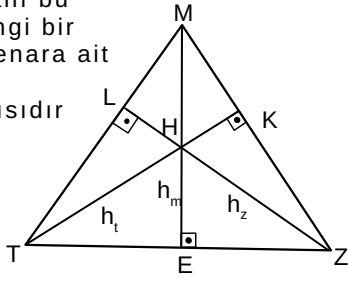


ÜÇGENDE ALAN BAĞINTILARI

Bir üçgenin alanı bu üçgenin herhangi bir kenarı ve bu kenara ait yüksekliğin çarpımının yarısıdır



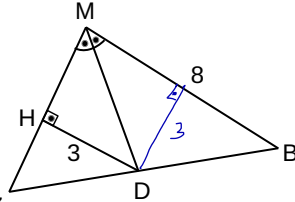
Üçgenin yükseklikleri tek noktada kesişir. Bu nokta diklik merkezidir. Diklik merkezi üçgenel bölgeye ait olmayabilir. (Geniş açılı üçgenlerde.)

$$\text{Şekilde } A(MTZ) = \frac{m \cdot h_m}{2} = \frac{z \cdot h_z}{2} = \frac{t \cdot h_t}{2}$$

Örnek...1 :

MBZ bir üçgendir. $|HD|=3br$, $|MB|=8br$, $[MD]$, M açısının açıortayı olduğuna göre $A(MDB)$ kaç birim karedir?

$$A(MDB) = \frac{3 \cdot 8}{2} = 12 br^2$$

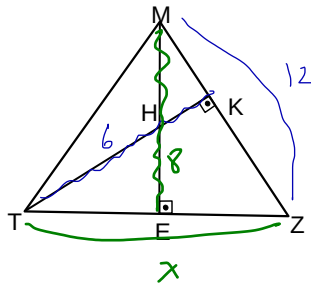


Örnek...2 :

MTZ bir üçgen, $|TK|=6br$, $|MZ|=12br$, $|ME|=8br$ ise $|TZ|$ kaç birimdir?

$$A(MTZ) = \frac{8 \cdot x}{2} = \frac{6 \cdot 12}{2}$$

$$\Rightarrow x = 9 br$$

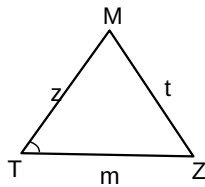


Sinüslü alan bağıntısı

$$A(MTZ) = \frac{m \cdot z \cdot \sin(\widehat{T})}{2}$$

$$= \frac{t \cdot z \cdot \sin(\widehat{M})}{2}$$

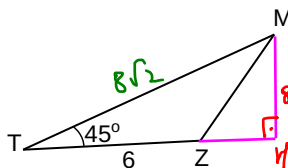
$$= \frac{t \cdot m \cdot \sin(\widehat{Z})}{2}$$



Örnek...3 :

MTZ bir üçgendir. $|MT|=8\sqrt{2}br$, $|TZ|=6br$, $m(\widehat{T})=45^\circ$ ise bu üçgenin alanı kaç birim karedir?

$$A(MTZ) = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8\sqrt{2} \cdot \sin 45^\circ = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 24 br^2$$

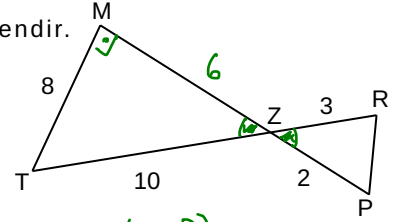


$$[MH] \perp TZ \Rightarrow [MH]=8 \quad A(MTZ) = \frac{8 \cdot 6}{2} = 24 br^2$$

Örnek...4 :

MTZ bir dik üçgendir.

$[TR] \cap [MP] = \{Z\}$, $m(\widehat{M})=90^\circ$ verilen uzunluklara göre $A(PRZ)$ kaç birim karedir?



$$A(PRZ) = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2 \cdot \sin(\widehat{RZP})$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2 \cdot \frac{8}{10} = \frac{12}{5} br^2$$

Örnek...5 :

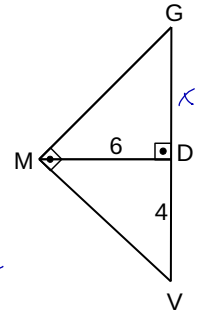
MTZ bir üçgen

$m(\widehat{GMV})=m(\widehat{MDG})=90^\circ$, $|DV|=4br$, $|MD|=6br$ dir. Buna göre $A(GMV)$ kaç birim karedir?

$$6^2 = 4 \cdot x \quad (\text{öklid})$$

$$x = 9$$

$$A(GMV) = \frac{6 \cdot 3}{2} = 9 br^2$$



Örnek...6 :

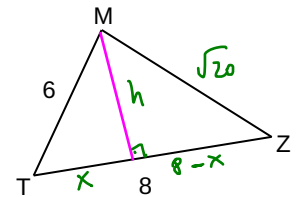
MTZ bir üçgendir.

$|MT|=6br$, $|MZ|=\sqrt{20}br$, $|ZT|=7br$ olduğuna göre $A(MTZ)$ kaç birim karedir?

$$6^2 - x^2 = h^2 = (\sqrt{20})^2 - (8-x)^2$$

$$36 - 20 = (x+8-x)(x-8+x)$$

$$x = 5 \quad h = \sqrt{11}$$

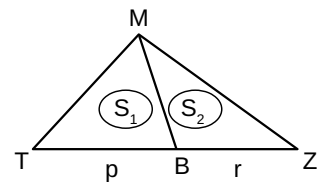


$$A(MTZ) = \frac{8 \cdot \sqrt{11}}{2} = 4\sqrt{11} br^2$$

Yükseklikleri aynı olan

üçgenlerde, alanlar tabanlarla doğru orantılıdır

$$\frac{A(MTB)}{A(MBZ)} = \frac{p}{r}$$



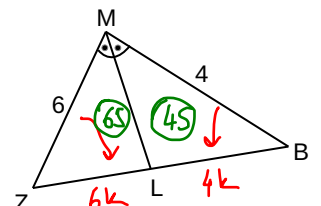
Örnek...7 :

MBZ bir üçgendir. $|MK|=6br$, $|MB|=4br$ ise, $\frac{A(MLB)}{A(MZB)}$ kaçtır?

$\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6$ / $\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4$ oranı teoremi ile

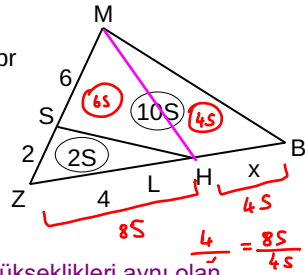
$$\frac{A(MLB)}{A(MZB)} = \frac{4 \cdot 6}{4 \cdot 4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

$\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6$ / $\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4$ MLZ ve MBL üçgenleri arasındaki alan oranını eşit açıların kollarına göre sinüslü alan bağıntısı ile elde edebilirsiniz. ML ortak kenar alınır ve işlemlerde sadeleşir



Örnek...8 :

MBZ bir üçgendir.
 $6 \cdot |SZ|=3$, $|ZL|=2$, $|SM|=12$ br
 $2S$ ve $10S$ verilen
 bölgelerin alanı ise, x
 kaçtır?



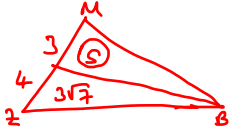
MH çizilir ve yükseklikleri aynı olan
 üçgenlerde alanlar tabanlar ile orantılı =
 olarak yerleştirilerek S cinsinden
 alanlar bulunur

Örnek...9 :

MBZ bir üçgendir.
 $2|MG|=|BZ|=6$ br,
 $|BG|=|GZ|=4$ br ise
 Alan(MBG) kaç birimdir?

$$|GH| = \sqrt{16-9} = \sqrt{7}$$

$$A(MGB) = \frac{6\sqrt{7}}{2} = 3\sqrt{7}$$



$$\frac{S}{3\sqrt{7}} = \frac{3}{4}$$

$$S = \frac{9\sqrt{7}}{4}$$

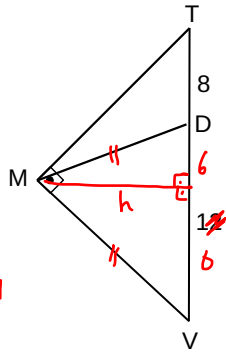
Örnek...10 :

MTV bir dik üçgen
 $|TD|=8$ br $|DV|=12$ br dir.
 $|MD|=|MV|$ ise, $A(TMD)$
 kaç birim karedir?

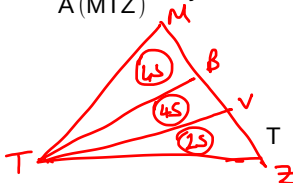
$$h^2 = 4 \cdot 6 \text{ (Öklid)}$$

$$h = 2\sqrt{21}$$

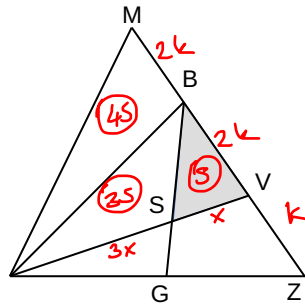
$$A(TMD) = \frac{8 \cdot 2\sqrt{21}}{2} = 8\sqrt{21}$$

**Örnek...11 :**

MTZ bir üçgendir.
 $|S| = |TV| \cap |GB|$,
 $2 \cdot |VZ| = |BV| = |MB|$
 ve $3 \cdot |SV| = |TS|$ göre
 $\frac{A(BSV)}{A(MTZ)}$ kaçtır?

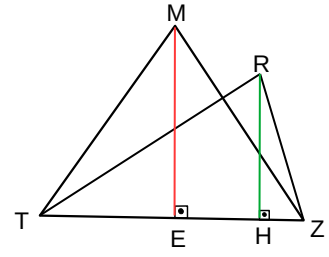


$$\frac{A(BSV)}{A(MTZ)} = \frac{5}{105} = \frac{1}{10}$$



Tabanları
 aynı olan
 üçgenlerde,
 alanlar
 yüksekliklerle
 doğru
 orantılıdır

$$\frac{A(MTZ)}{A(TRZ)} = \frac{|ME|}{|RH|}$$

**Örnek...12 :**

$A(TPZ):A(TMZ):A(TRZ)=18:20:15$

olduğuna göre $\frac{|ME|}{|PS|} + \frac{|ME|}{|RZ|}$
 işleminin sonucu kaçtır?

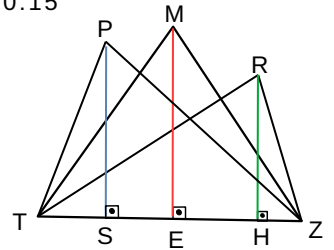
$$A(TPZ) = 18A$$

$$A(TMZ) = 20A$$

$$A(TRZ) = 15A$$

$$\frac{|ME|}{|PS|} + \frac{|ME|}{|RZ|} = \frac{20A}{18A} + \frac{20A}{15A} = \frac{10}{9} + \frac{4}{3} = \frac{22}{9}$$

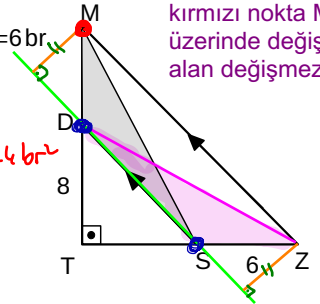
tabanları aynı olan üçgenlerde alanlar yükseklikle orantılıdır

**Örnek...13 :**

MTZ bir dik üçgendir. $|SZ|=6$ br
 ve $|TD|=8$ ise $A(MDS)$ kaç
 birimdir?

$$A(MDS) = A(DSZ) = \frac{6 \cdot 8}{2} = 24 \text{ br}^2$$

tabanları aynı
 yükseklikleri eşit



mavi noktalar sabit,
 kırmızı nokta MZ
 üzerinde değişse de
 alan değişmez

Benzer iki üçgenin alanları oranı
 benzerlik oranının karesine eşittir.

Örnek...14 :

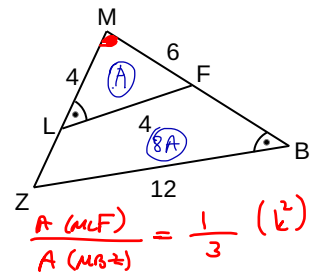
MBZ bir üçgendir.
 $|LM| = |LF| = 4$ br,
 $2|MF| = |ZB| = 12$ br,
 $m(L) = m(B)$ olduğuna göre
 $A(ZBFL)$ kaçtır?

$$\triangle MFL \sim \triangle MBZ$$

$$k = \frac{4}{12} = \frac{1}{3} \text{ (benzerlik oranı)}$$

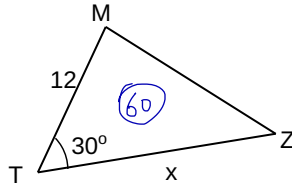
örnek 9'da 4-4-6 üçgenin alanını $3\sqrt{7}$ bulmuştuk

$$A = 3\sqrt{7} \Rightarrow 8A = 24\sqrt{7}$$



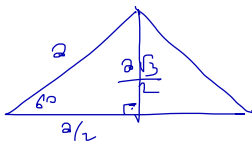
DEĞERLENDİRME

- 1) MTZ bir üçgendir.
 $|MZ|=12$ br,
 $m(\hat{T})=30^\circ$ ve
 $A(MTZ)=60$ br²
 ise $|TZ|=x$ kaç
 birimdir?



$$\frac{1}{2} \cdot x \cdot 12 \cdot \sin 30 = 60 \Rightarrow x = 20 \text{ br}$$

- 2) Alanı $16\sqrt{3}$ br² olan eşkenar üçgenin yüksekliği kaç birimdir?



$$\frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a}{2} = 16\sqrt{3}$$

$$a^2 = 64$$

$$a = 8$$

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a = 4\sqrt{3} \text{ br}$$

- 3) Heron Teoremi: Kenarları bilinen üçgenin alanı

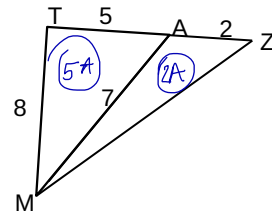
Kenarları z, t, m olan bir üçgende

$$u = \frac{z+t+m}{2} \text{ olmak üzere}$$

Alan $(MTZ) = \sqrt{u(u-a)(u-b)(u-c)}$ birim karedir

Yukarıda verilen teoreme göre cevaplayınız.

MTZ bir üçgen, T, A, Z noktaları doğrusaldır. Verilen uzunluklara göre $A(MZA)$ kaç birim karedir?



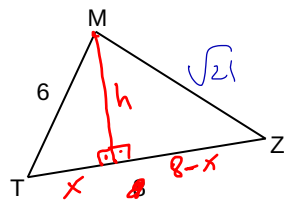
$$\Delta TMA \text{ da heron } |z|$$

$$u = \frac{8+7+5}{2} = 10$$

$$A(MZA) = \sqrt{10 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 3} = 10\sqrt{3} \text{ br}^2$$

$$5A = 10\sqrt{3} \Rightarrow A = 2\sqrt{3} \text{ br}^2$$

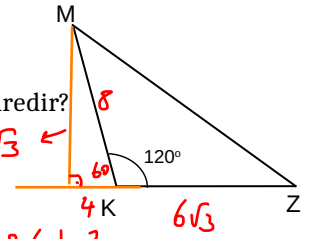
- 4) MTZ bir üçgendir.
 $|MZ| = \sqrt{21}$ br,
 $|ZT| = 8$ br $|MT| = 6$
 olduğuna göre
 $A(MTZ)$ kaç birim
 karedir?



$$6^2 - x^2 = h^2 = 21 - (8-x)^2$$

$$15 = (x+8-x) \cdot (x-8+x)$$

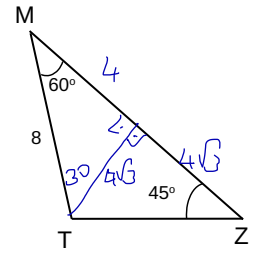
- 5) MKZ bir üçgen
 $m\hat{MKZ} = 120^\circ$ dir.
 $|MK| = 8$ br, $|KZ| = 6\sqrt{3}$ br
 ise, $A(MKZ)$ kaç birim karedir?



$$A(MKZ) = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 6\sqrt{3} \cdot \sin 120 = 36 \text{ br}^2$$

2.yol olarak sinüslü alan kullanılabilir ($\sin 120 = \sin 60$ alınır)

- 6) MTZ bir üçgen
 $m(\hat{TMZ}) = 60^\circ$
 $m(\hat{TZM}) = 45^\circ$ dir.
 $|MT| = 8$ br
 ise, $A(MTZ)$ kaç birim
 karedir?



$$A(MTZ) = \frac{4\sqrt{3}(4+4\sqrt{3})}{2} = 8\sqrt{3} + 24 \text{ br}^2$$

- 7) Yandaki şekilde G MBZ üçgeninin ağırlık merkezi, $A(KLF) = 24$ br² dir. $KF \parallel ZB$ olduğuna göre $A(MBZ)$ kaç birim karedir?



$$\Delta KLF \sim \Delta ZGB$$

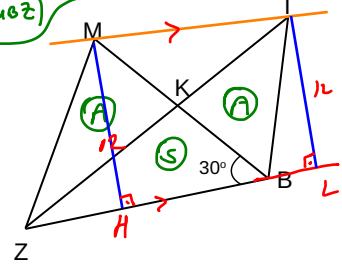


$$k = \frac{2}{3}$$

$$k^2 = \frac{4}{9} \rightarrow \frac{2A}{9A} = \frac{4}{9}$$

$$A(MBZ) = 27A = 27 \cdot 24 = 648 \text{ br}^2$$

- 8) Yandaki şekilde $A(MZK) = A(BTZ)$, $m(\hat{ZBM}) = 30^\circ$. T noktasının ZB doğrusuna uzaklığı 12 birim ise $|MB|$ kaçtır?



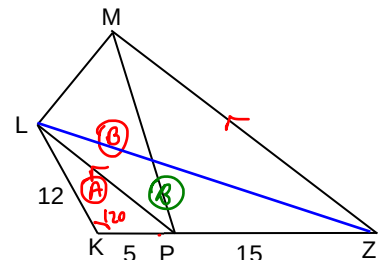
$$A(MZK) = A(TZB)$$

$$MT \parallel ZB \text{ olmalı}$$

$$|TL| = |MH| = 12 \text{ br}$$

$$|MB| = \frac{24 \text{ br}}{\sin 30} = 48 \text{ br}$$

- 9) Şekilde $|KL| = 12$ br,
 $|PZ| = 15$ br, $|KP| = 5$ br,
 $m(\hat{PKL}) = 120^\circ$ dir.
 $LP \parallel MZ$ olduğuna göre KPML dörtgenin alanı kaç birim karedir?



$$A(KPML) = A(LZP)$$

$$A(KPML) = A(LZP) = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 20 \cdot \sin 120 = 60\sqrt{3} \text{ br}^2$$