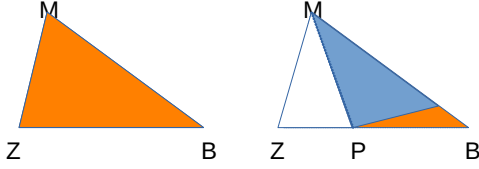


AÇIORTAY

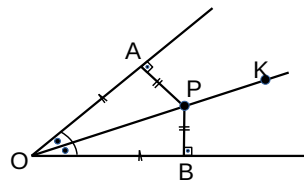
MBZ üçgeninin MZ kenarı MB kenarı üstüne katlandığında oluşan şekil altta verilmiştir.



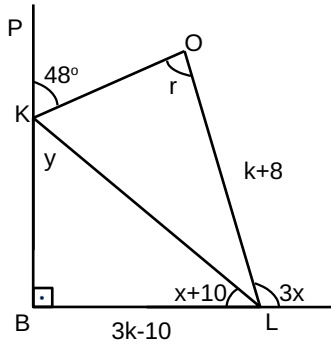
Kâğıt açıldıktan sonra MBZ üçgeninin içinde yapılan katlama sonucunda oluşan [MP], ZMB açısının açıortayıdır.

Bir açının ölçüsünü eş iki parçaya ayıran ışına açıortay denir.

Şekilde [OK, $\widehat{AOB}$ nın açıortayıdır.



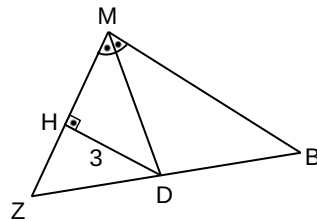
Açıortay üzerinde alınan noktanın açının kollarına uzaklığı eşittir.
 $P \in [OK]$, $|AP| = |BP|$ ve $|OB| = |AO|$

Örnek...1 :

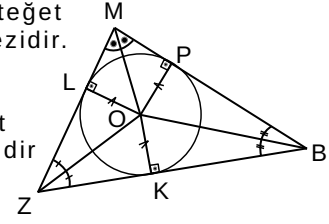
Şekilde KBL üçgeninin [KL] na göre katlayınca KOL üçgeni elde edilmektedir. Buna göre, uzunluk ve açılardaki r, k, x ve y değerlerini bulunuz

Örnek...2 :

MBZ bir üçgendir. [MD], M açısının açıortayı $|HD| = 3br$ $|DB| = 5br$ olduğuna göre $|MB| - |MH|$ kaç birimdir?

**ÜÇGENDE AÇIORTAY ÖZELLİKLERİ**

1. Üçgende iç açıortaylar bir noktada kesişir. Kesiştikleri bu nokta üçgenin iç teğet çemberinin merkezidir.

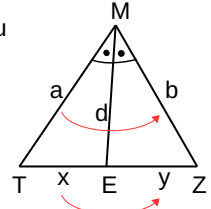


Şekilde O iç teğet çemberin merkezidir

2. iç açıortay teoremi

MTZ bir üçgen ve [ME] bu üçgenin açıortayı ise

$$\frac{a}{b} = \frac{x}{y}$$



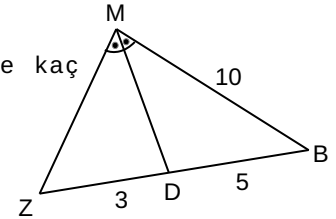
[Teoreme ait geogebra sayfası linki](#)

Örnek...3 :

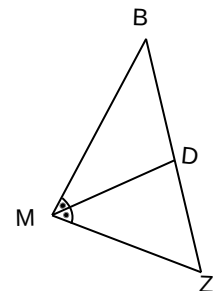
Üçgende iç açıortay teoremini ispatlayınız

Örnek...4 :

MBZ bir üçgendir. $|ZD| = 3br$, $|BD| = 5br$, ise kaç $\angle(MBZ)$ kaç birimdir?

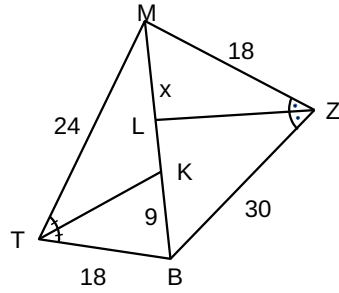
**Örnek...5 :**

MBZ bir üçgendir. $|BZ| = 3|BD|$, $\angle(MBZ) = 60^\circ$ br ise $|MZ| + |ZD|$ kaç birimdir?

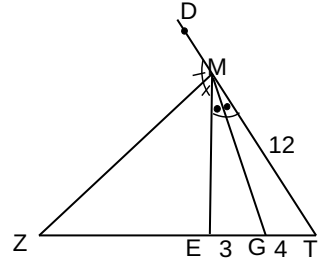


Örnek...6 :

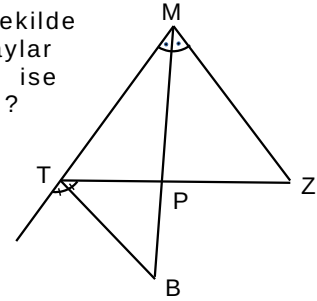
MTBZ bir dörtgen,
[TK] ve [ZL]
açıortaylardır.
Şekilde verilen
uzunluklara göre
|ML| kaç birimdir?

**Örnek...8 :**

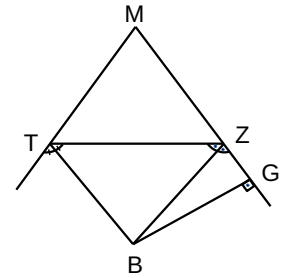
MTZ üçgendir.
|TG|=4br, |EG|=3br |MT|=12br
[MG], MTE açısının, [MZ]
EMD açısının
açıortaylarıdır.
Buna göre |ZG| kaçtır?

**Örnek...9 :**

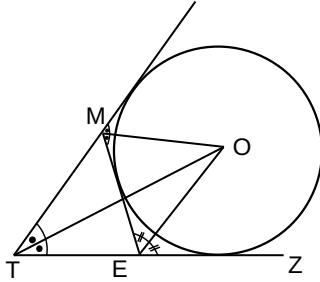
MTZ bir üçgendir. Şekilde
[MB] ve [TB] açıortaylar
|MZ|=3.|ZP|, |PM|=24br ise
|MB| kaç birimdir ?

**Örnek...10 :**

MTZ bir üçgendir. Şekilde
[MB] ve [ZB] açıortaylar
|MT|=|MZ|+1=6br, |ZG|=2br ise
|ZT| kaç birimdir ?

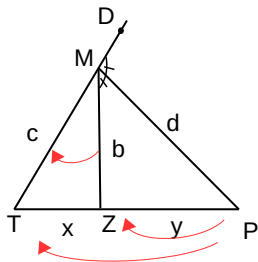
**3.**

Üçgende iki
dış açıortay ve
diğer iç açının
açıortayı bir
noktada
kesişir.
Kesiştikleri bu
nokta üçgenin
dış teğet
çemberlerinden
birinin
merkezidir.

**4. Dış açıortay teoremi**

MTZ bir üçgen,
[MP] bu üçgenin M
açısının dış açıortayı
ise

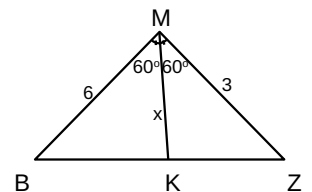
$$\frac{b}{c} = \frac{y}{y+x} \text{ dir.}$$

**Örnek...7 :**

Üçgende dış açıortay teoremini ispatlayınız.

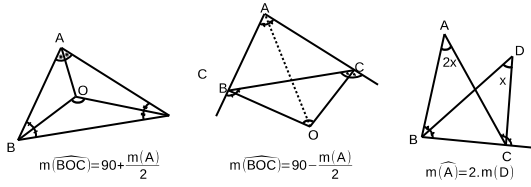
Örnek...11 :

MBZ bir üçgen
 $m(\angle BMK) = m(\angle KMZ) = 60^\circ$
2. |MZ|=|MB|=6br ise |MK|=x
kaç birimdir?



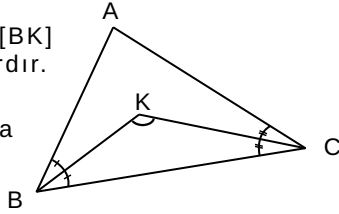
HATIRLATMA

Açıortay ve açı özellikleri



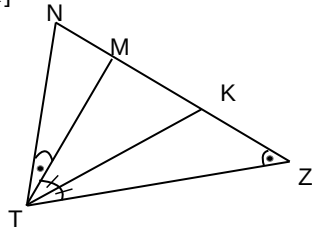
Örnek...12 :

ABC bir üçgendir. [BK] ve [KC] açıortaylardır.
 $m(\widehat{BKC}) = x + 55$,
 $m(\widehat{BAC}) = x$ olduğuna
 göre $m(\widehat{BKC})$ kaç
 derecedir?



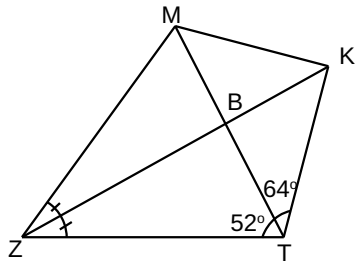
Örnek...13 :

NTZ bir üçgendir. [TK]
 MTN açısının
 açıortayıdır.
 $m(\widehat{TKN}) = 68^\circ$,
 $m(\widehat{NTZ}) = 84^\circ$ olduğuna
 göre $m(\widehat{NKT})$ kaç
 derecedir?



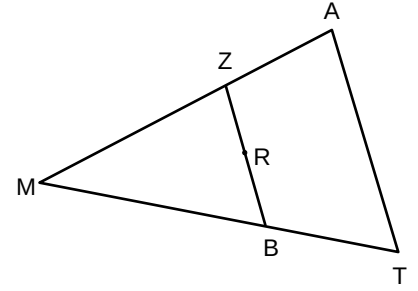
Örnek...14 :

MTZ bir üçgendir. [KZ], MZT açısının
 açıortayıdır. $m(\widehat{MTZ}) = 52^\circ$, $m(\widehat{MTK}) = 64^\circ$
 olduğuna göre
 $m(\widehat{MKZ})$ kaç
 derecedir?



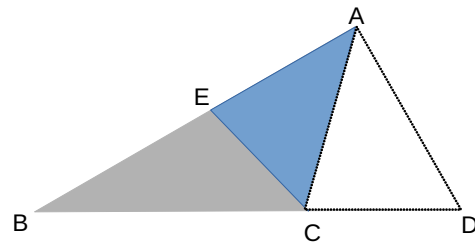
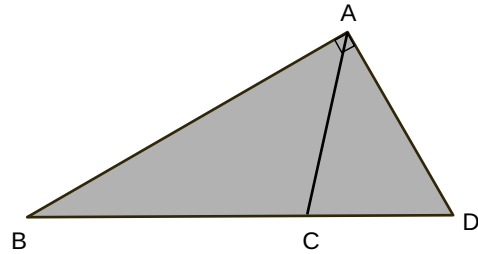
Örnek...15 :

Şekilde R, MAT
 üçgeninin iç teğet
 çemberinin
 merkezidir.,
 $ZB \parallel AT$ dir.
 $|MA| = 20$ br, $|MT| = 24$ br olduğuna
 göre, $\widehat{MBZ}$ kaç
 birimdir.



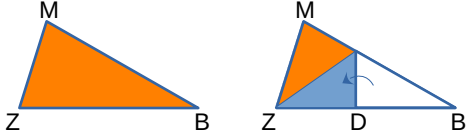
Örnek...16 :

Ön yüzü gri arka yüzü mavi olan aşağıdaki
 ABD dik üçgeni, AC doğrusu boyunca
 katlandığında alttaki şekildeki gibi D noktası
 AB kenarı üzerinde E noktasına denk
 gelmektedir. $|CD| = |BE| = 12$ cm ise $|AC|$ kaç
 cm dir?

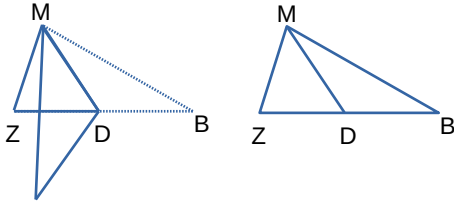


KENARORTAY

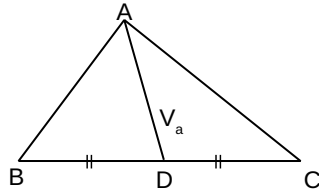
MBZ üçgeninin B köşesi Z köşesi ile çakışacak biçimde katlandığında oluşan şekil altta verilmiştir. Katlamayla elde edilen D noktası BZ kenarının orta noktasıdır.



MBZ üçgeni ilk haline getirildikten sonra tekrar M ve D noktalarından geçen doğru boyunca katlarsak oluşacak [MD] kat çizgisi BZ kenarına ait kenarortay olur.



Bir üçgende bir köşe ile karşı kenarın orta noktasını birleştiren doğru parçasına kenarortay denir. a kenarına ait kenarortayı V_a ile gösteririz.

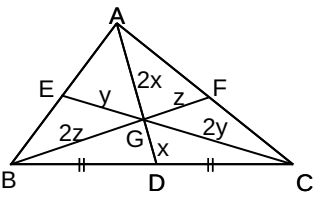


$m(A) = 90^\circ$ ise $|AD| = |BD| = |DC|$ olur.

Üçgende kenarortaylar bir noktada kesişir. Bu noktaya ağırlık merkezi denir ve genellikle G harfi ile gösterilir.

Ağırlık merkezi, kenarortayı, köşeye iki, kenara bir birim olacak şekilde böler.

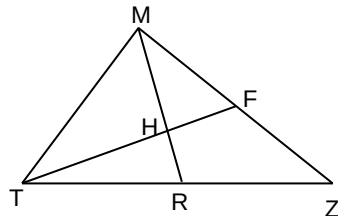
Bir köşeden karşı kenara çizilen doğru parçası, başka bir köşeden çizilen kenarortayı köşeden iki ve kenardan bir birim olacak şekilde bölüyorsa kenarortaydır



Örnek...17 :

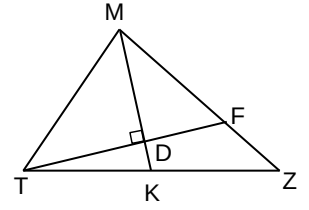
MTZ bir üçgen, [MR] ve [TF] kenarortaylardır.

$[MR] \cap [TF] = [H]$,
 $|MH| = 14 \text{ br}$, $|HF| = 5 \text{ br}$,
 $|MR| + |TF|$ kaçtır?



Örnek...18 :

MTZ bir üçgen $[TF] \perp [MK]$ dir. D ağırlık merkezi ve $|MK| = 12 \text{ br}$, $|TF| = 18$ ise, $|MT|$ kaç birimdir?

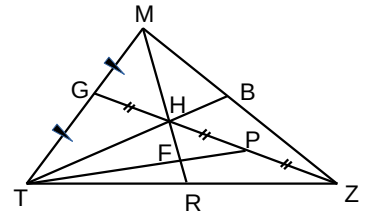


Örnek...19 :

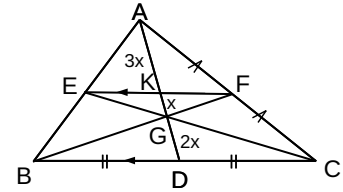
MTZ bir üçgen

$|TG| = |GM|$,
 $|GH| = |HP| = |PZ|$

olduğuna göre $\frac{|HF|}{|MR|}$ oranı kaçtır?



[BF] ve [CE] kenarortaylar ise $[FE] \parallel [BC]$ ve $2|EF| = |BC|$ ($[EF]$ orta tabandır)



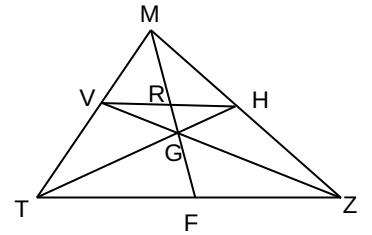
Ayrıca kenarortayın parçaları arasında $2|AK| = 6|GK| = 3|DG|$ bağıntısı vardır.

Örnek...20 :

MTZ üçgen, G ağırlık merkezidir.

$[VZ] \cap [TH] = [G]$ ve M, R, G, F doğrusal noktaldır.

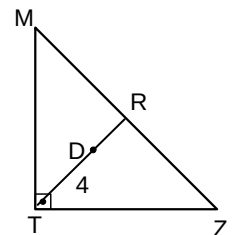
$|MG| = 24 \text{ br}$
 Buna göre $|MF|$ kaç birimdir?



Örnek...21 :

MTZ bir üçgen D ağırlık merkezidir $|TD| = 4 \text{ cm}$, olduğuna göre

a) $|MZ|$ kaç cm dir ?
 b) $V_z^2 + V_m^2$ kaç cm^2 dir?

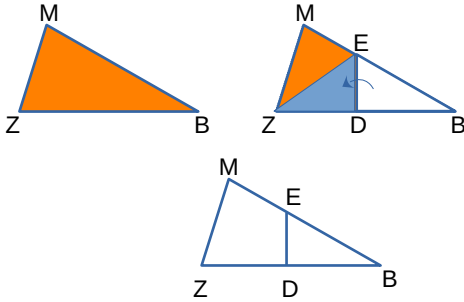


KENAR ORTA DİKME

Üçgenin herhangi bir kenarının orta noktasından geçen ve bu kenara dik olan doğru parçasına kenar orta dikme denir.

Bir üçgende kenar orta dikmeler bir noktada kesişir. Bu nokta çevrel çemberin merkezidir. (Üçgenin köşelerinden geçen çember) Çevrel çemberin merkezi üçgenin açı çesidine göre farklı bölgelere ait olabilir.

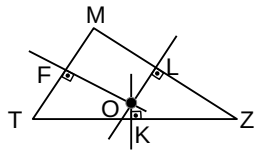
MBZ üçgeninin B köşesi Z köşesi ile çakışacak biçimde katlandığında oluşan şekil altta verilmiştir.



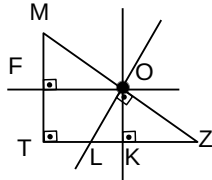
Kâğıt açıldıktan sonra MZB üçgeninin içinde yapılan katlama sonucunda oluşan [ED], [BZ] kenarının kenar orta dikmesidir.

Durum1 Dar açılı üçgende kenar orta dikmelerin kesim noktası üçgenin içindedir.

[OF] $\perp$ [MT],
[OL] $\perp$ [MZ],
[OK] $\perp$ [TZ],
|MF|=|TF|,
|TK|=|KZ|,
|ZL|=|LM|

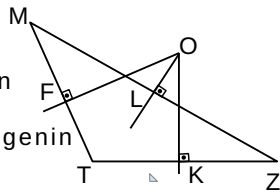


Durum 2 Dik açılı üçgende kenar orta dikmeler hipotenüs üzerinde kesişir



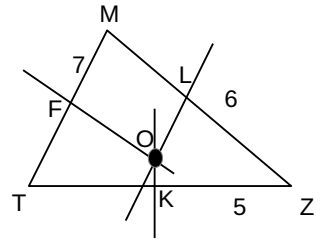
Durum 3 Geniş açılı üçgende kenar orta dikmelerin kesişim noktası üçgenin dış bölgesindedir.

Şekillerde O noktası kenar orta dikmelerin kesişim noktasıdır. (çevrel çemberin [üçgenin köşe noktalarından geçen çember] merkezidir)



Örnek...22 :

Şekilde MTZ bir üçgen, O noktası kenar orta dikmelerin kesim noktasıdır. |MF|=7 br, |KZ|=5 br, |LZ|=6 birim olduğuna göre Ç(MTZ) kaç birimdir?

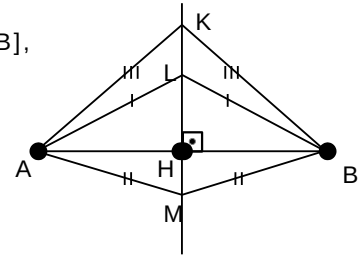


Uyarı

Bir doğru parçasının orta dikmesi üzerinde alınan her nokta, doğru parçasının uç noktalarına eşit uzaklıktadır ve bunun karşısı da doğrudur.

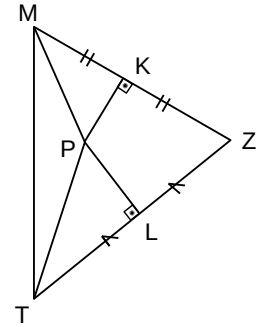
Şekilde $KM \perp [AB]$,

|LA|=|LB|,
|MA|=|MB|,
|KA|=|KB|



Örnek...23 :

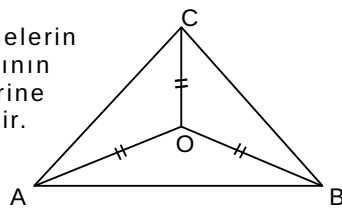
MTZ bir üçgen, [KP] $\perp$ [MZ], [LP] $\perp$ [TZ], $m(\angle PTL)=34^\circ$, $m(\angle PMK)=26^\circ$, olduğuna göre $m(\angle MPT)$ kaç derecedir?



Uyarı

kenar orta dikmelerin kesişim noktasının üçgenin köşelerine uzaklıkları eşittir.

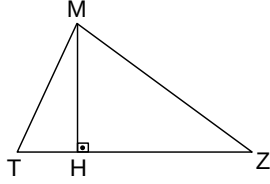
Şekilde O noktası kenar orta dikmelerin kesişim noktası, |AO|=|OB|=|OC| dir.



YÜKSEKLİK VE DİKLİK MERKEZİ

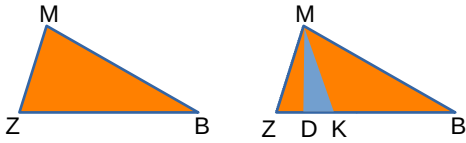
Bir üçgende herhangi bir köşeden karşı kenara veya karşı kenarın uzantısına dik olarak indirilen doğru parçasına o kenara ait yükseklik denir.

Şekilde $[MH]$, $[TZ]$ nın yüksekliğidir.



H noktasına dikme ayağı denir. Kenar m olarak gösterildiğinde $|MH| = h_m$ ile gösterilir.

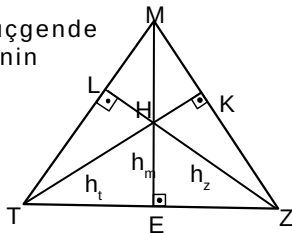
MZB üçgeninin Z köşesi ZB kenarı üzerine gelecek biçimde M köşesi hizasına kadar olan kısmı katlandığında oluşan şekil altta verilmiştir.



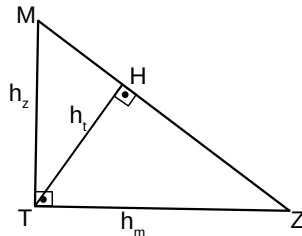
Kâğıt açıldıktan sonra ABC üçgeninin içinde yapılan katlama sonucunda oluşan $[MD]$, $[BZ]$ kenarına ait olan yüksekliktir.

Bir üçgende yükseklikleri tek noktada kesişir. Bu nokta diklik merkezidir. Diklik merkezi üçgenin açı çeşidine göre farklı bölgelere ait olabilir.

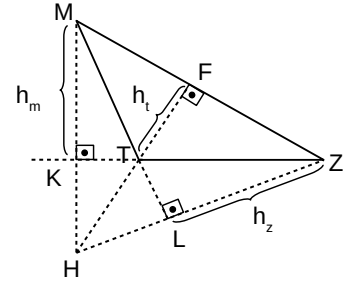
Durum 1 Dar açılı üçgende diklik merkezi üçgenin içindedir.



Durum 2 Dik açılı üçgende diklik merkezi üçgende dik kenarların birleştiği köşedir



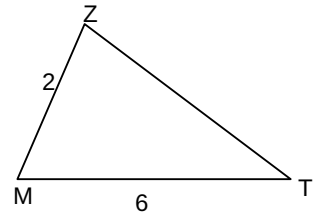
Durum 3 Geniş açılı üçgende diklik merkezi üçgenin dış bölgesindedir.



Şekillerde H noktası diklik merkezidir

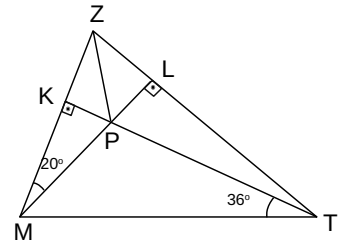
Örnek...24 :

Şekilde $|ZM|=2$ br, $|MT|=6$ br dir. Z noktası, MTZ üçgeninin diklik merkezi ise $|ZT|$ kaç birimdir?



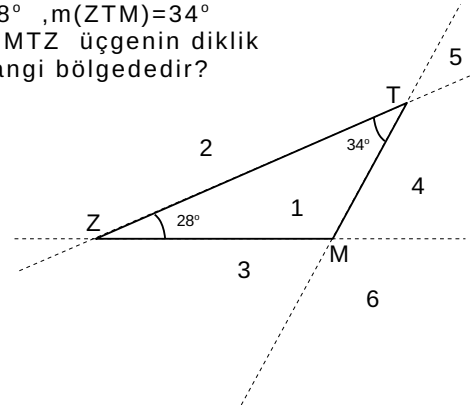
Örnek...25 :

Şekilde MTZ bir üçgen, $[KT] \perp [MZ]$, $[ZT] \perp [ML]$ $[KT] \cap [ML] = \{P\}$ dir. Buna göre $m(\angle PZT)$ kaç derecedir?



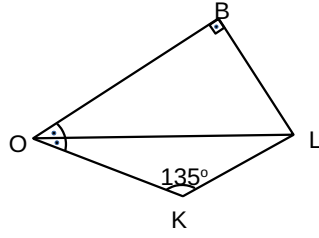
Örnek...26 :

Şekilde , $m(\angle MZT)=28^\circ$, $m(\angle ZTM)=34^\circ$ Buna göre MTZ üçgeninin diklik merkezi hangi bölgededir?

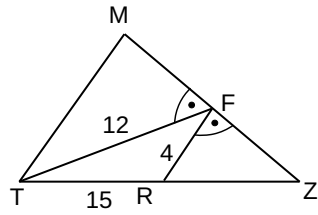


DEĞERLENDİRME

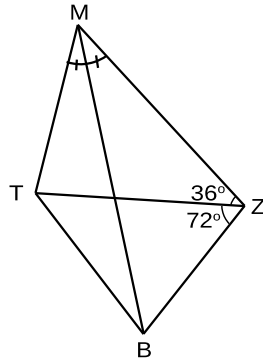
- 1) OBL dik üçgen
 $|OB|=8\text{ br}$, $|OK|=5\text{ br}$
 ise $|KL|$ kaç
 birimdir?



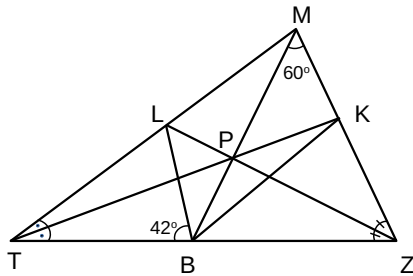
- 2) MTZ bir üçgendir.
 $m(\widehat{TFZ})=m(\widehat{RFZ})$
 Şekilde $|TF|=12\text{ br}$
 $|TR|=15\text{ br}$ ve
 $|RF|=4\text{ br}$ ise
 $|RZ|$ kaç
 birimdir?



- 3) Şekilde MTBZ dörtgen,
 $[MB]$ açıortay,
 $2m(\widehat{MZT})=m(\widehat{TZB})=72^\circ$
 ise $m(\widehat{MBT})$ kaç
 derecedir?

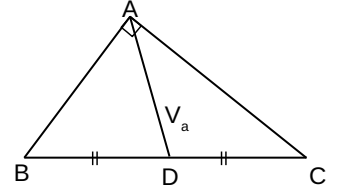


- 4) MTB
 üçgen, $[TK]$,
 $[LZ]$

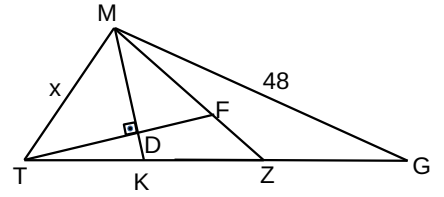


açıortaylardır. $[TK] \cap [MB] \cap [LZ] = \{P\}$
 $m(\widehat{BMZ})=60^\circ$, $m(\widehat{LBT})=42^\circ$ ise $m(\widehat{MBK})$ kaç
 derecedir?

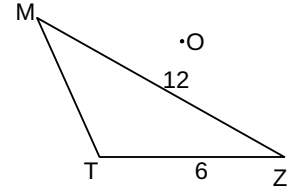
- 5) ABC bir dik üçgendir. V_a ,
 V_b ve V_c sırasıyla a, b ve
 c kenarına ait
 kenarortaylar olmak
 üzere $5V_a^2 = V_b^2 + V_c^2$
 bağıntısının geçerli
 olduğunu gösteriniz



- 6) MTG bir üçgen.
 $[MK] \perp [TF]$.
 Şekilde
 D, MTZ
 üçgeninin ağırlık
 merkezi ve Z,
 $[TG]$ nin orta
 noktasıdır.
 $|MG|=48\text{ cm}$ ise
 x kaçtır?



- 7) O noktası MTZ üçgeninin
 kenar orta dikmelerinin
 kesim noktasıdır.
 $|MZ|=12\text{ br}$, $|TZ|=6\text{ br}$ dir.
 Buna göre $|MT|$ kaç farklı
 tamsayı değeri alır?



- 8) Şekilde $|ZM|=6\text{ br}$,
 $|MT|=4\text{ br}$ dir.
 K noktası, MTZ üçgeninin
 diklik merkezi ise $|ZT|$ nin
 alabileceği kaç farklı tamsayı
 değeri vardır?

