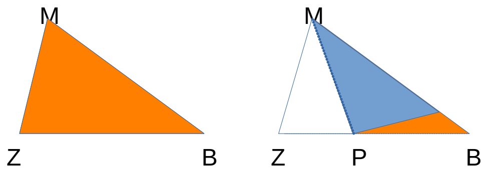
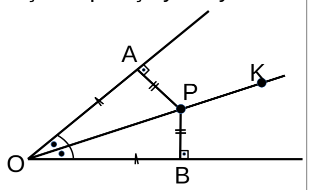
AÇIORTAY

MBZ üçgeninin MZ kenarı MB kenarı üstüne katlandığında oluşan şekil altta verilmiştir.



Kâğıt açıldıktan sonra MBZ üçgeninin içinde yapılan katlama sonucunda oluşan [MP] , ZMB açısının açıortayıdır.

Bir açının ölçüsünü eş iki parçaya ayıran ışına açıortay denir.
Şekilde [OK , $\widehat{AOB}$ nın açıortayıdır.

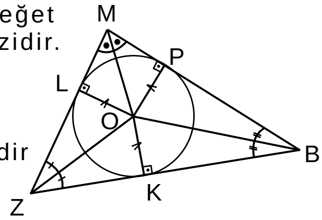


Açıortay üzerinde alınan noktanın açının kolларına uzaklığı eşittir.
P∈[OK , |AP|=|PB| ve |OB|=|AO|

ÜÇGENDE AÇIORTAY ÖZELLİKLERİ

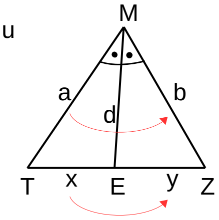
1. Üçgende iç açıortaylar bir noktada kesişir. Kesiştikleri bu nokta üçgenin iç teğet çemberinin merkezidir.

Şekilde O iç teğet çemberin merkezidir



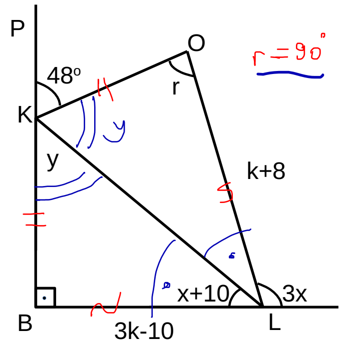
2. iç açıortay teoremi
MTZ bir üçgen ve [ME] bu üçgenin açıortayı ise

$\frac{a}{b} = \frac{x}{y}$



Örnek...1 :

$\overset{\triangle}{KBL} \cong \overset{\triangle}{KOL}$



Şekilde KBL üçgeninin [KL] na göre katlayınca KOL üçgeni elde edilmektedir. Buna göre, uzunluk ve açılardaki r,k,x ve y değerlerini bulunuz

$r = 90°$

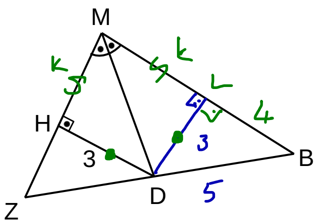
$2y+48=180$
$y+24=90$
$y=66$

$2.(x+10)+3x=180 \Rightarrow x=32$

$k+8=3k-10 \Rightarrow k=9$

Örnek...2 :

MBZ bir üçgendir. [MD] ,M açısının açıortayı |HD|=3br |DB|=5br olduğuna göre |MB|−|MH| kaç birimdir?

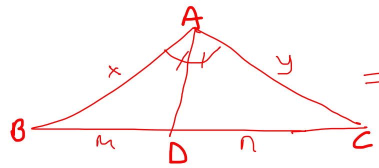


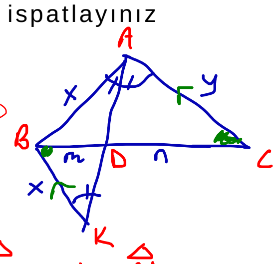
$\overset{\triangle}{HMD} \cong \overset{\triangle}{LMD}$

$|MB|-|MH| = k+4-k = 4$

Örnek...3 :

Üçgende iç açıortay teoremini ispatlayınız





$\frac{x}{y} = \frac{m}{n}$ gösterecek

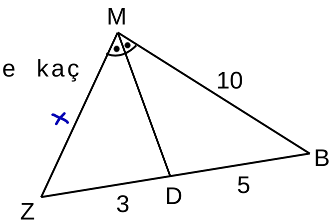
BK ile AC paralel olacak şekilde AD yi uzatalaım

$\overset{\triangle}{BKD} \sim \overset{\triangle}{CAD}$

$\frac{x}{y} = \frac{m}{n}$

Örnek...4 :

MBZ bir üçgendir. |ZD|=3br, |BD|=5br , ise kaç Ç(MBZ) kaç birimdir?



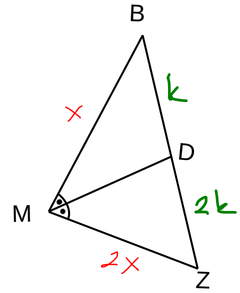
$\frac{x}{10} = \frac{3}{5}$

$x = 6$

$Ç(MBZ) = 6+10+8 = 24$ br

Örnek...5 :

MBZ bir üçgendir. |BZ|=3|BD| ,Ç(MBZ)=60 br ise ise |MZ|+|ZD| kaç birimdir?

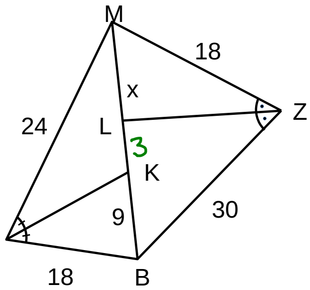


$\frac{|MB|}{|MZ|} = \frac{k}{2k}$ ($|MB| \to x$, $|MZ| \to 2x$)

$3x+3k=60 \Rightarrow k+x=20 \Rightarrow |MZ|+|ZD| = 2x+2k = 40$

Örnek...6 :

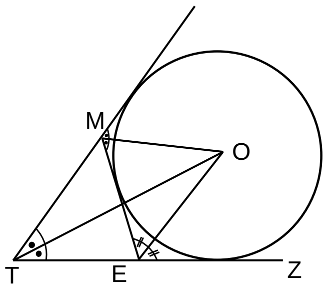
MTBZ bir dörtgen, [TK] ve [ZL] açıortaylardır. Şekilde verilen uzunluklara göre |ML| kaç birimdir?

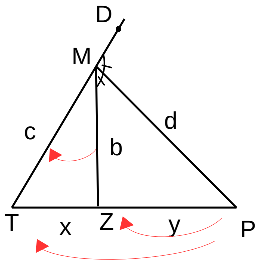


$\frac{18}{24} = \frac{9}{|KM|} \rightarrow 12$

$\frac{18}{30} = \frac{x}{12} \rightarrow x = \frac{36}{5}$

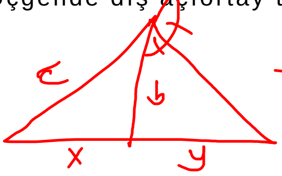
(sırasıyla $\overset{\triangle}{MTB}$ ve $\overset{\triangle}{BMZ}$ de iç açıortay teoremini yazarız)

3. Üçgende iki dış açıortay ve diğer iç açının açıortayı bir noktada kesişir. Kesiştikleri bu nokta üçgenin dış teğet çemberlerinden birinin merkezidir.	

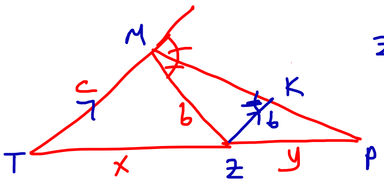
4. Dış açıortay teoremi MTZ bir üçgen, [MP] bu üçgenin M açısının dış açıortayı ise $\frac{b}{c} = \frac{y}{y+x}$ dir.	

Örnek...7 :

Üçgende dış açıortay teoremini ispatlayınız.



$\frac{y}{y+x} = \frac{b}{c}$ gösterilecek



$ZK \parallel TM$ çizelim

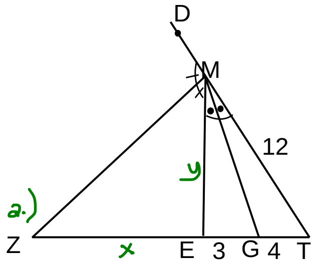
MKZ ikizkenardır

$\overset{\triangle}{PZK} \sim \overset{\triangle}{PTM}$

$\frac{y}{y+x} = \frac{b}{c}$

Örnek...8 :

MTZ üçgendir.
|TG|=4br, |EG|=3br |MT|=12br
[MG], MTE açısının, [MZ], EMD açısının açıortaylarıdır.
Buna göre |ZG| kaçtır?



$\frac{3}{4} = \frac{y}{12} \Rightarrow y = 9$ (iç a.)

$\frac{x}{x+7} = \frac{9}{12} \Rightarrow x = 21$ (dış a.)

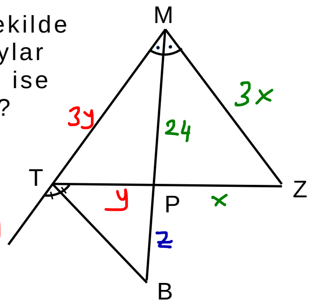
$|ZG| = 21 + 3 = 24$ br

Örnek...9 :

$3z = 24 + z$

$z = 12$

MTZ bir üçgendir. Şekilde [MB] ve [TB] açıortaylar |MZ|=3.|ZP|, |PM|=24br ise |MB| kaç birimdir ?



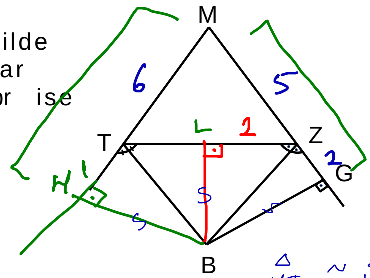
$\frac{3x}{x} = \frac{|MT|}{|TP|} = \frac{3y}{y}$ (iç açı ortay teoremi)

$\frac{z}{z+24} = \frac{y}{3y} \Rightarrow z = 12 \Rightarrow |MB| = 24 + 12 = 36$ br

(dış açıortay teoremi)

Örnek...10 :

MTZ bir üçgendir. Şekilde [MB] ve [ZB] açıortaylar |MT|=|MZ|+1=6br, |ZG|=2br ise |ZT| kaç birimdir ?



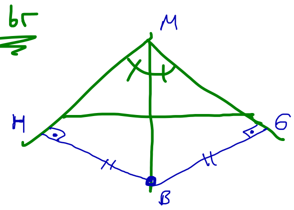
$|MH| = |MG| \Rightarrow |HT| = 1$

$|TL| = |TH| = 1$

$|ZT| = 3$ br

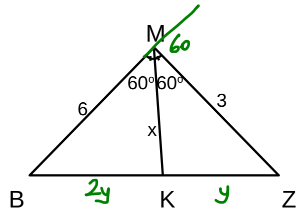
$\overset{\triangle}{HTB} \cong \overset{\triangle}{LTB}$

$\overset{\triangle}{GBZ} \cong \overset{\triangle}{LBZ}$



Örnek...11 :

MBZ bir üçgen
$m(\widehat{BMK}) = m(\widehat{KMZ}) = 60^o$
$2.|MZ| = |MB| = 6$br ise $|MK| = x$ kaç birimdir?



[MK] içaçıortay

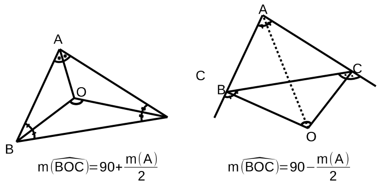
$\frac{|BK|}{|KZ|} = \frac{6}{3} = \frac{2y}{y}$

[MZ] dışaçıortay

$\frac{y}{3y} = \frac{x}{6} \Rightarrow x = 2$

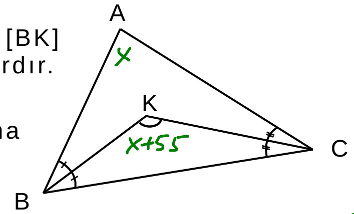
HATIRLATMA

Açıortay ve açı özellikleri



Örnek...12 :

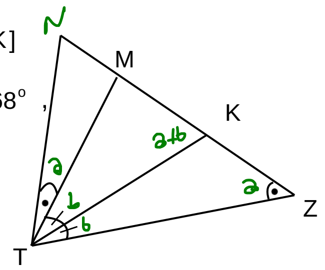
ABC bir üçgendir. [BK] ve [KC] açıortaylardır. $m(\widehat{BKC})=x+55$, $m(\widehat{BAC})=x$ olduğuna göre $m(\widehat{BKC})$ kaç derecedir?



$90+\frac{x}{2}=x+55 \Rightarrow \frac{x}{2}=35 \quad x=70^\circ$

Örnek...13 :

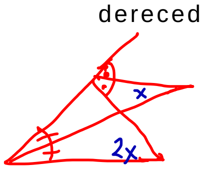
NTZ bir üçgendir. [TK] MTN açısının açıortaydır. $m(\widehat{TKN})=68^o$, $m(\widehat{NTZ})=84^o$ olduğuna göre $m(\widehat{NZT})$ kaç derecedir?

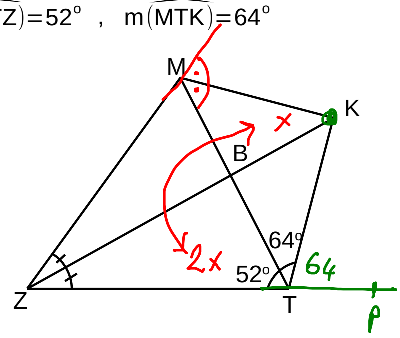


$-\ / \ a+b=68$
$+\ a+2b=84$
$b=16 \Rightarrow a=52^\circ$

Örnek...14 :

MTZ bir üçgendir. [KZ] , MZT açısının açıortaydır. $m(\widehat{MTZ})=52^o$, $m(\widehat{MTK})=64^o$ olduğuna göre $m(\widehat{MKZ})$ kaç derecedir?



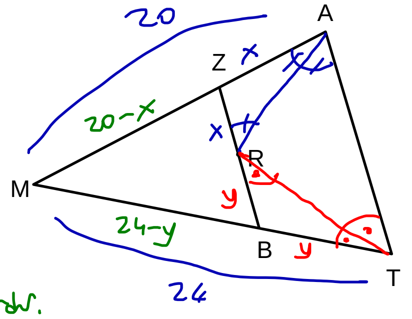


ZT dışa doğru uzatılırsa KTP açısı 64 derece ve TK açıortay olur
ZB iç açıortay ve TK dışaçıortay olduğundan K noktası MTZ nin dış tğet çemberlerinden birinin merkezidir. MK da dış açıortay olur. MKZ x---2x iliskisisine göre 26 olur

$2x=52 \Rightarrow x=26$

Örnek...15 :

Şekilde R , MAT üçgeninin iç teğet çemberinin merkezidir., [ZB//AT] dir. |MA|=20 br, |MT|=24 br olduğuna göre, Ç(MBZ) kaç birimdir.

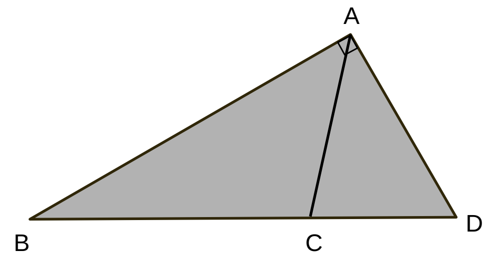


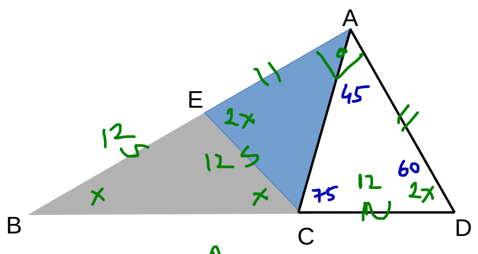
[AR], [RT] açıortaylardır.

Ç(MBZ) = 20−x+x+24−y+y = 44 br

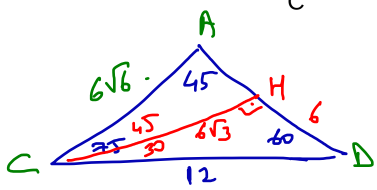
Örnek...16 :

Ön yüzü gri arka yüzü mavi olan aşağıdaki ABD dik üçgeni, AC doğrusu boyunca katlandığında alttaki şekildeki gibi D noktası AB kenarı üzerinde E noktasına denk gelmektedir. ICDI = IBEI = 12 cm ise |AC| kaç cm dir?





$3x=90^\circ$
$x=30^\circ$

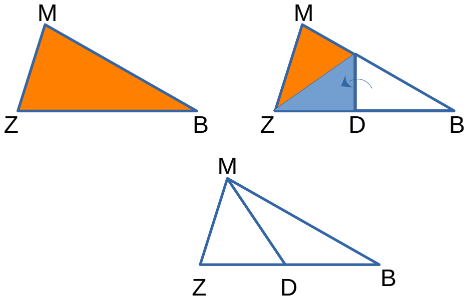


[CH] çizilince
CAH 45-45-90
CHD 30-60-90
üçgen olur.

$|AC|=6\sqrt{6}$

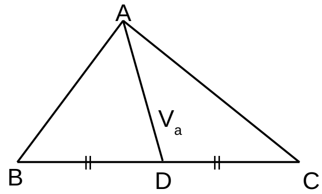
KENARORTAY

MBZ üçgeninin B köşesi Z köşesi ile çakışacak biçimde katlandığında oluşan şekil altta verilmiştir.



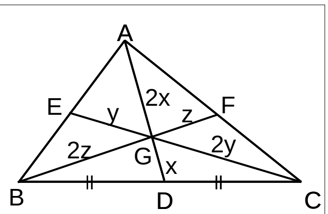
Kâğıt açıldıktan sonra MZB üçgeninin içinde yapılan katlama sonucunda oluşan [MD] , [BZ] kenarının kenarortayıdır.

Bir üçgende bir köşe ile karşı kenarın orta noktasını birleştiren doğru parçasına kenarortay denir.
a kenarına ait kenarortayı V_a ile gösteririz.



m(A)= 90° ise |AD|=|BD|=|DC| olur.

Üçgende kenarortaylar bir noktada kesişir.
Bu noktaya ağırlık merkezi denir ve genellikle G harfi ile gösterilir.

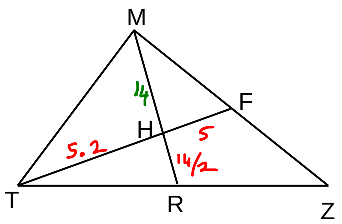


Ağırlık merkezi ,kenarortayı, köşeye iki , kenara bir birim olacak şekilde böler.

Bir köşeden karşı kenara çizilen doğru parçası, başka bir köşeden çizilen kenarortayı köşeden iki ve kenardan bir birim olacak şekilde bölüyorsa kenarortaydır.

Örnek...17 :

MTZ bir üçgen, [MR] ve [TF] kenarortaylardır.
[MR]∩[TF]={H} ,
|MH|=14 br ,|HF|=5 br ,
|MR|+|TF| kaçtır?



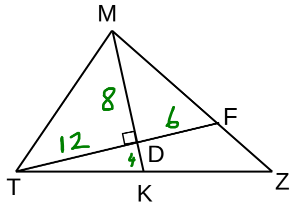
|MD| = 14+7 = 21
TF = 10+5 = 16

H ağırlık merkezi kenarortayları köşeden 2.k ,kenardan 1.k oranında böler

ağırlık merkezi kenarortayı 2 ye 1 oranında böler

Örnek...18 :

MTZ bir üçgen [TF]⊥[MK] dir. D ağırlık merkezi ve |MK|=12 br ,|TF|=18 ise, |MT| kaç birimdir?

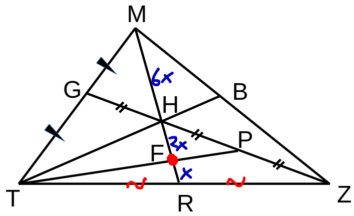


$|MT|^2 = 12^2 + 8^2$

$|MT| = \sqrt{208} = 4\sqrt{13}$

Örnek...19 :

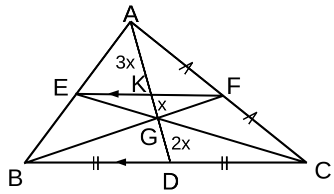
MTZ bir üçgen
|TG|=|GM| ,
|GH|=|HP|=|PZ|
olduğuna göre $\frac{|HF|}{|MR|}$ oranı kaçtır?



F , HTZ de ağırlık merkezidir.
H , MTZ de ağırlık merkezidir → [MR] ,[ZG] kenarortayı köşeden 2 kenardan 1 bölüyor ⇓ [MR] kenarortay

$\frac{|HF|}{|MR|} = \frac{2x}{9x} = \frac{2}{9}$

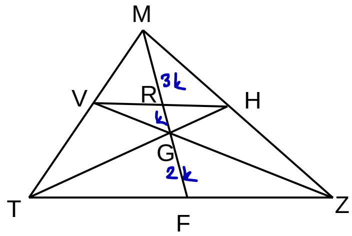
[BF] ve [CE] kenarortaylar ise [FE]//[BC] ve 2.|EF|=|BC| ([EF] orta tabandır)



Ayrıca kenarotayın parçaları arasında 2.|AK|=6.|GK|=3.|DG| bağıntısı vardır.

Örnek...20 :

MTZ üçgen, G ağırlık merkezidir. [VZ]∩[TH]={G} ve M,R,G,F doğrusal noktalardır.
|MG|=24 br
Buna göre |MF| kaç birimdir?

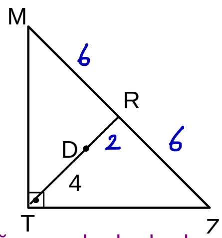


|MG| = 4k = 24 ⇒ k = 6

|MF| = 6k = 36

Örnek...21 :

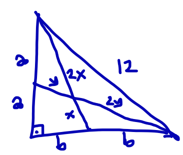
MTZ bir üçgen D ağırlık merkezidir |TD|=4cm, olduğuna göre
a) |MZ| kaç cm dir ?
b) $V_z^2+V_m^2$ kaç cm² dir?



a) |MZ| = 12

hipotenüse ait kenarortay uzunluğu, ayırdığı parçalar kadardır.

b)



$4a^2+4b^2 = 144$ (pisagor)

$V_z^2 = 9y^2 = 4b^2+a^2$

$V_m^2 = 9x^2 = 4a^2+b^2$

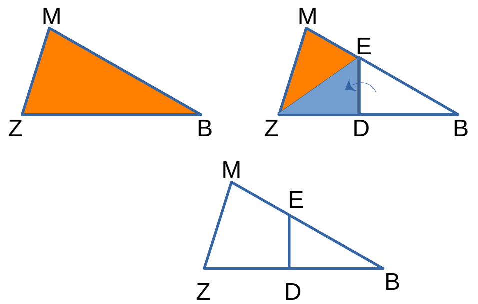
$V_z^2+V_m^2 = 5(a^2+b^2) = 180$ cm²

KENAR ORTA DİKME

Üçgenin herhangi bir kenarının orta noktasından geçen ve bu kenara dik olan doğru parçasına kenar orta dikme denir.

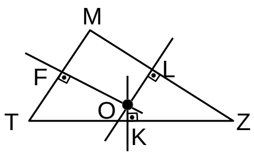
Bir üçgende kenar orta dikmeler bir noktada kesişir. Bu nokta çevrel çemberin merkezidir. (Üçgenin köşelerinden geçen çember) Çevrel çemberin merkezi üçgenin açı çeşidine göre farklı bölgelere ait olabilir.

MBZ üçgeninin B köşesi Z köşesi ile çakışacak biçimde katlandığında oluşan şekil altta verilmiştir.

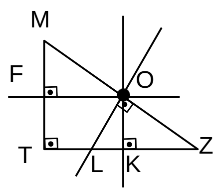


Kâğıt açıldıktan sonra MZB üçgeninin içinde yapılan katlama sonucunda oluşan [ED] , [BZ] kenarının kenar orta dikmesidir.

Durum1 Dar açılı üçgende kenar orta dikmelerin kesim noktası üçgenin içindedir.
[OF] ⊥ [MT],
[OL] ⊥ [MZ],
[OK] ⊥ [ZT],
|MF|=|TF|,
|TK|=|KZ|,
|ZL|=|LM|

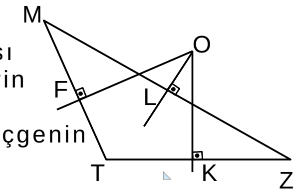


Durum 2 Dik açılı üçgende kenar orta dikmeler hipotenüs üzerinde kesişir



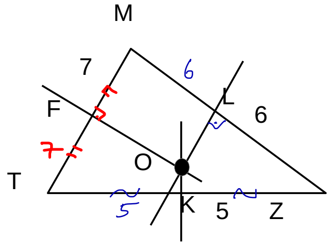
Durum 3 Geniş açılı üçgende kenar orta dikmelerin kesişim noktası üçgenin dış bölgesindedir.

Şekillerde O noktası kenar orta dikmelerin kesişim noktasıdır. (çevrel çemberin [üçgenin köşe noktalarından geçen çember] merkezidir)



Örnek...22 :

Şekilde MTZ bir üçgen, O noktası kenar orta dikmelerin kesim noktasıdır. |MF|=7 br, |KZ|=5 br, |LZ|=6 birim olduğuna göre Ç(MTZ) kaç birimdir?



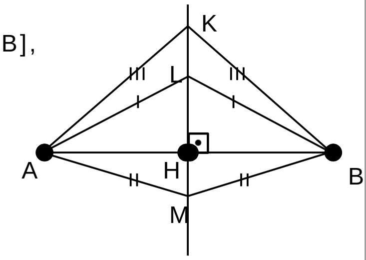
$Ç(MTZ) = 10+12+14$

$= 36$ br

Uyarı
Bir doğru parçasının orta dikmesi üzerinde alınan her nokta, doğru parçasının uç noktalarına eşit uzaklıktadır ve bunun karşıtı da doğrudur.

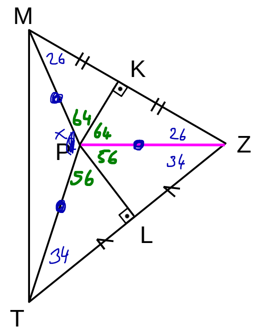
Şekilde KM ⊥ [AB],

|LA|=|LB|,
|MA|=|MB|,
|KA|=|KB|



Örnek...23 :

MTZ bir üçgen, [KP] ⊥ [MZ], [LP] ⊥ [TZ], m(PTL)=34°, m(PMK)=26°, olduğuna göre m(MPT) kaç derecedir?



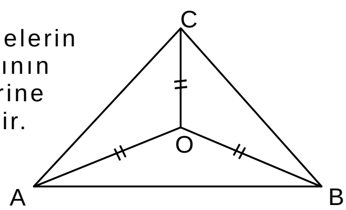
$x+2.56+2.64=360$

$x=120°$

[PZ] çizilirse MPZ ve ZPT üçgenleri ikizkenar olur

Uyarı
kenar orta dikmelerin kesişme noktasının üçgenin köşelerine uzaklıkları eşittir.

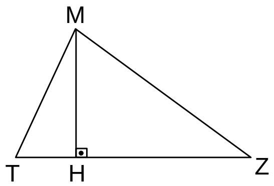
Şekilde O noktası kenar orta dikmelerin kesişim noktası, |AO|=|OB|=|OC| dir.



YÜKSEKLİK VE DİKLİK MERKEZİ

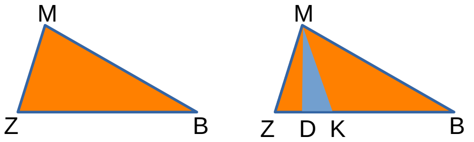
Bir üçgende herhangi bir köşeden karşı kenara veya karşı kenarın uzantısına dik olarak indirilen doğru parçasına o kenara ait yükseklik denir.

Şekilde [MH], [TZ] nın yüksekliğidir.



H noktasına dikme ayağı denir.
Kenar m olarak gösterildiğinde |MH| = h_m ile gösterilir.

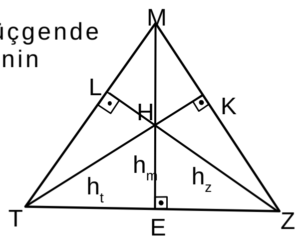
MZB üçgeninin Z köşesi ZB kenarı üzerine gelecek biçimde M köşesi hizasına kadar olan kısmı katlandığında oluşan şekil altta verilmiştir.



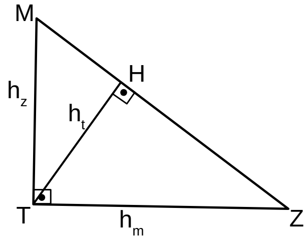
Kâğıt açıldıktan sonra ABC üçgeninin içinde yapılan katlama sonucunda oluşan [MD], [BZ] kenarına ait olan yüksekliktir.

Bir üçgende yükseklikleri tek noktada kesişir. Bu nokta diklik merkezidir. Diklik merkezi üçgenin açı çeşidine göre farklı bölgelere ait olabilir.

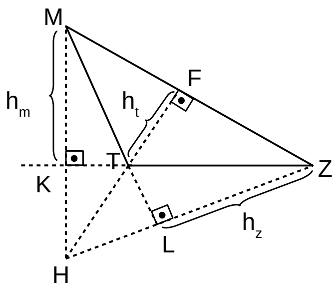
Durum 1 Dar açılı üçgende diklik merkezi üçgenin içindedir.



Durum 2 Dik açılı üçgende diklik merkezi üçgende dik kenarların birleştiği köşedir



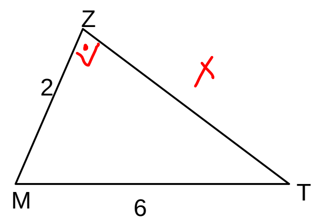
Durum 3 Geniş açılı üçgende diklik merkezi üçgenin dış bölgesindedir.



Şekillerde H noktası diklik merkezidir

Örnek...24 :

Şekilde |ZM|=2 br, |MT|= 6br dir.
Z noktası, MTZ üçgeninin diklik merkezi ise |ZT| kaç birimdir?

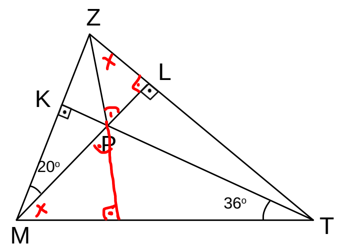


$x^2+2^2=6^2$

$x=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$

Örnek...25 :

Şekilde MTZ bir üçgen,
[KT] ⊥ [MZ], [ZT] ⊥ [ML]
[KT] ∩ [ML]={P} dir.
Buna göre m(PZT) kaç derecedir?

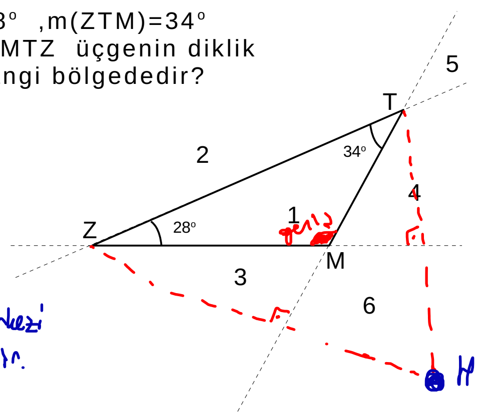


$x+20+36=90$

$x=34°$

Örnek...26 :

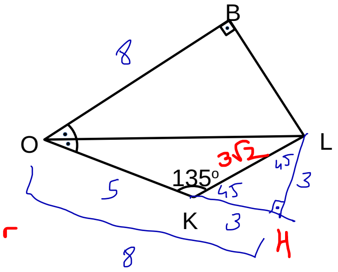
Şekilde ,
m(MZT)=28° ,m(ZTM)=34°
Buna göre MTZ üçgenin diklik merkezi hangi bölgededir?



H diklik merkezi
6. bölgededir.

DEĞERLENDİRME

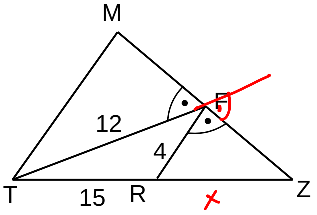
1) OBL dik üçgen $|OB|=8\,br$, $|OK|=5\,br$ ise $|KL|$ kaç birimdir?



$B\hat{O}L \cong H\hat{O}L$ $|KH| = 3$ br

KHL 45-45-90

2) MTZ bir üçgendir. $m(\widehat{TFZ})=m(\widehat{RFZ})$ Şekilde $|TF|=12\,br$, $|TR|=15\,br$ ve $|RF|=4\,br$ ise $|RZ|$ kaç birimdir ?

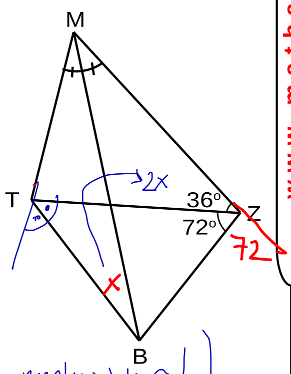


$\frac{x}{x+15} = \frac{4}{12} \Rightarrow 3x = x+15$

$x = 7,5$

[FZ], $T\hat{R}F$ de dış açıortaydır.

3) Şekilde MTBZ dörtgen , [MB] açıortay, $2m(\widehat{MZT})=m(\widehat{TZB})=72^\circ$ ise $m(\widehat{MBT})$ kaç derecedir?

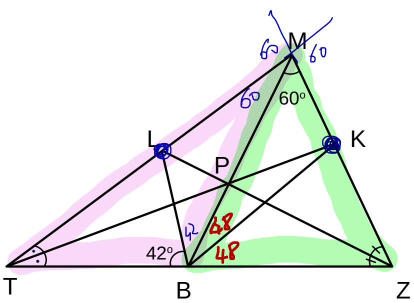


$2x = 36$

$x = 18°$

(B dış teğet çemberlerinin birinin merkezidir!)

4) MTB üçgen,[TK], [LZ]

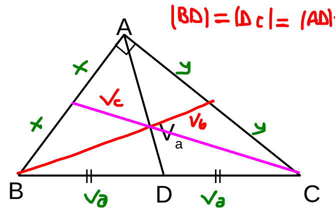


açıortaylardır. $[TK]\cap[MB]\cap[LZ]=\{P\}$ $m(\widehat{BMZ})=60^\circ$, $m(\widehat{LBT})=42^\circ$ ise $m(\widehat{MBK})$ kaç derecedir?

şekilde L noktası MBZ, K noktası ise TBM üçgeninin dış teğet çemberlerinden birinin merkezi olur. (iç ve dış açıortayların kesişimlerine dikkat)

5) ABC bir dik üçgendir. V_a, V_b ve V_c sırasıyla a,b ve c kenarına ait kenarortaylar olmak üzere $5V_a^2=V_b^2+V_c^2$ bağıntısının geçerli olduğunu gösteriniz

$|BD| = |DC| = |AD| = V_a$



$x^2+4y^2 = V_c^2$

$4x^2+y^2 = V_b^2$

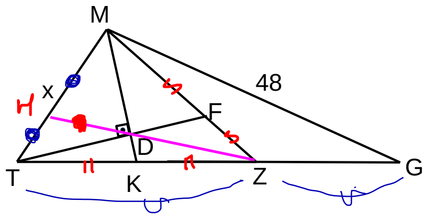
$+$

$5x^2+5y^2 = V_b^2+V_c^2$

$(2V_a)^2 = (2x)^2+(2y)^2 \rightarrow x^2+y^2 = V_a^2$

$\rightarrow 5\cdot V_a^2 = V_b^2+V_c^2$

6) MTG bir üçgen. [MK] ⊥ [TF]. Şekilde D , MTZ üçgeninin ağırlık merkezi ve Z , [TG] nın orta noktasıdır. $|MG|=48\,cm$ ise x kaçtır?

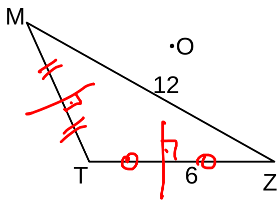


$[ZH] // [MG]$ [ZH] orta taban dır.

$|HZ| = 24 \Rightarrow |DH| = 8$ br $\Rightarrow x = 2\cdot 8 = 16$

(muhteşem üçlü)

7) O noktası MTZ üçgeninin kenar orta dikmelerinin kesim noktasıdır. |MZ|=12 br, |TZ|=6 br dir. Buna göre |MT| kaç farklı tamsayı değeri alır?



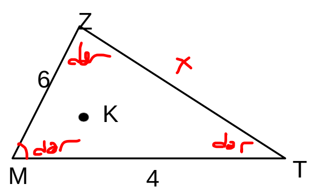
T açısı geniş açıdır.

$|MT| = x \Rightarrow$ $12-6 < x < 12+6$

$6 < x < 18$

$12^2 > x^2+6^2 \rightarrow$ $6 < x < \sqrt{108}$

8) Şekilde |ZM|=6 br, |MT|= 4 br dir. K noktası, MTZ üçgeninin diklik merkezi ise |ZT| nin alabileceği kaç farklı tamsayı değeri vardır?



tüm iç açılar dar açı olmak zorundadır.

$x^2 < 6^2+4^2 \rightarrow x < \sqrt{52}$

$6^2 < x^2+4^2 \rightarrow x > \sqrt{20}$

$4^2 < x^2+6^2$ ✓

3 ü beraber

$\sqrt{20} < x < \sqrt{52}$

tamsayılar 5, 6, 7

3 adet