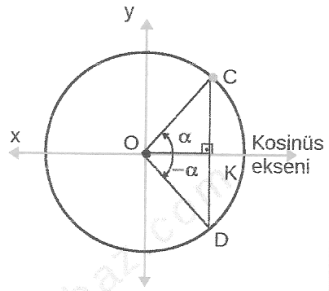
TRİGONOMETRİK DENKLEMLER

İçinde bilinmeyenin trigonometrik fonksiyonları bulunan, bilinmeyenin bazı değerleri için doğru olan eşitliklere, trigonometrik denklem denir. Denklemi sağlayan değerlere, denklemin kökleri; köklerin oluşturduğu kümeye de çözüm kümesi denir. Çözüm kümesini bulmak için yapılan işlemlere de denklemi çözme denir.

A) cos(x)=cosα DENKLEMİNİN ÇÖZÜMÜ

Birim çember üzerinde standart pozisyonda α radyanlık yayın bitim noktası C, $-\alpha$ radyanlık yayın bitim noktası D olsun. Şekli inceleyiniz.



cosx=cos α ise k bir tam sayı olmak üzere, denklemin çözüm kümesi aşağıdaki gibi bulunur.

Ç={x: x= α + k.2π veya x= −α + k.2π }

GENEL OLARAK

$\cos(f(x))=\cos(g(x)) \rightarrow \begin{cases} f(x)= g(x)+k.2\pi \\ f(x)=-g(x)+k.2\pi \end{cases}$

Örnek...1 :

cos(4x−60)=cos(2x)
denkleminin çözüm kümesini bulunuz?

{x: x=30+k.180 V x=10+k.60}

$4x-60=2x+k.360$
$2x=60$
$x=30+k.180$

$4x-60=-2x+k.360$
$6x=60+k.360$
$x=10+k.60$

Örnek...2 :

$\cos(2x+40)=-\sqrt{3}/2 \rightarrow \cos 150$
denkleminin çözüm kümesini bulunuz

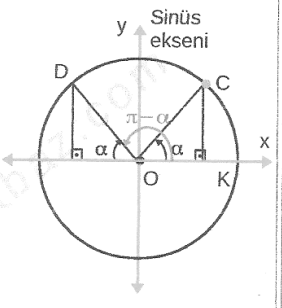
{x: x=55+k.180 V x=-95+k.180}

$2x+40=150+k.360$
$2x=110+k.360$
$x=55+k.180$

$2x+40=-150+k.360$
$2x=-190+k.360$
$x=-95+k.180$

B) sin(x)=sinα DENKLEMİNİN ÇÖZÜMÜ

Birim çember üzerinde standart pozisyonda α radyanlık yayın bitim noktası C, $\pi-\alpha$ radyanlık yayın bitim noktası D olsun. Şekli inceleyiniz.



sinx=sin α ise k bir tam sayı olmak üzere, denklemin çözüm kümesi aşağıdaki gibi bulunur.

Ç={x: x= α + k.2π veya x= π − α + k.2π }

GENEL OLARAK

$\sin(f(x))=\sin(g(x)) \rightarrow \begin{cases} f(x)= g(x)+k.2\pi \\ f(x)=\pi-g(x)+k.2\pi \end{cases}$

Örnek...3 :

$\sin(5x-120)=\frac{\sqrt{3}}{2}$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz

sin60

{x: x=36+k.72 V x=48+k.72}

$5x-120=60+k.360$
$=180+k.360$
$=36+k.72$

$5x-120=120+k.360$
$=240+k.360$
$=48+k.72$

www.matbaz.com

Örnek...4 :

$\sin(6x-40)= \cos(2x+20)$
denkleminin çözüm kümesini bulunuz?
{x: x=110/8+k.45 V x=150/4+k.90}

$\sin(90-(6x-40)) = \cos(2x+20)$

$130-6x = 2x+20$

$-8x = -110 + 360k$

$x = 110/8 \mp k.45$

$130-6x = -2x-20$

$150 = 4x$

$-4x = -150 + 360k$

$x = \frac{150}{4} + k.90$ → olması da mümkün fark etmiyor!

Örnek...5 :

$\sin(2x+40)=-\sin x$ ($\sin(-\alpha)$)
denkleminin çözüm kümesini bulunuz?
{x: x=-40/3+k.120 V x=140+k.360}

$2x+40 = -x + k.360$

$3x = -40 + k.360$

$x = -40/3 + 120k$

$2x+40 = 180+x+k.360$

$x = 140 + k.360$

Örnek...6 :

$\sin(x)=-1$
denkleminin (0,360) aralığında kaç farklı çözümü vardır?

$\sin(x) = \sin 270$

$x_1 = 270 + k.360$

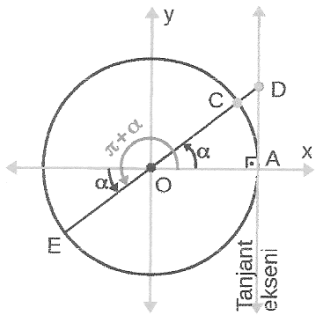
$x_2 = 180 - 270 + k.360$

$x_2 = -90 + k.360$

(1 ile aynı!) 1/4

C) $\tan(x)=\tan\alpha$ DENKLEMİNİN ÇÖZÜMÜ

Birim çember üzerinde standart pozisyonda α radyanlık yayın bitim noktası C, $\pi+\alpha$ radyanlık yayın bitim noktası E olsun. x=1 doğrusuna tanjant ekseni dendiğini öğrenmiştik. Orijinden ve C (ve E) noktasından geçen doğrunun tanjant eksenini kestiği nokta D olsun. İnceleyiniz.



$\tan x=\tan\alpha$

ise k bir tam sayı olmak üzere

$Ç=\{x: x= \alpha + k.\pi \}$

GENEL OLARAK

$\tan(f(x))=\tan(g(x)) \rightarrow f(x)= g(x)+k.\pi$

Örnek...7 :

$\tan(x)= \sqrt{3} \rightarrow \tan 60$
denkleminin çözüm kümesini bulunuz?
{x: x=60+k.180}

$x = 60 + k.180$

Örnek...8 :

$\tan(5x-20°)=\tan(3x+30°)$
denkleminin çözüm kümesini bulunuz?
{x: x=25+k.90}

$5x-20 = 3x+30$

$2x = 50 + k.180$

$x = 25 + k.90$

www.matbaz.com

D) cot(x)=cotα DENKLEMİNİN ÇÖZÜMÜ

cotx=cot α ise k bir tam sayı olmak üzere

Ç={x: x= α + k.π }

GENEL OLARAK

cot(f(x))=cot(g(x))→f(x)= g(x)+k.π

Örnek...9 :

cot(3x)=−1 denkleminin çözüm kümesini bulunuz

{x: x=45+k.60}

$3x = 135 + k.180$

$x = 45 + k.60$

Örnek...10 :

Cot(3x)=tan(2x) denkleminin çözüm kümesini bulunuz

{x: x=18+k.36}

$\tan(90-3x) = \tan 2x$

$90 - 3x = 2x + k.180$

$90 = 5x$

$x = 18 + k.36$

Örnek...11 :

$\tan 2x + \frac{\sqrt{2}-2\sin 2x}{\cos 2x} = 1$ denkleminin (0,90) arasındaki çözümünü kaçtır?

45/2

$\frac{\sin 2x + \sqrt{2} - 2\sin 2x}{\cos 2x} = 1$

$\sqrt{2} - \sin 2x = \cos 2x$

$\sin 2x + \cos 2x = \sqrt{2}$

$\sin 2x + 1.\cos 2x = \sqrt{2}$

$\sin 2x + \frac{\sin 45}{\cos 45}.\cos 2x = \sqrt{2}$ ($\sqrt{2}/2$)

$\sin 2x \cos 45 + \sin 45 \cos 2x = \sqrt{2}.\cos 45$

$\sin(2x+45) = 1 = \sin 90$

$2x+45 = 90 + k.360 \rightarrow x = 45/2 + k.180$

$2x+45 = 180-90 + k.360$ (x YNI)

Örnek...12 :

tanx+cotx = 4cos2x denklemini sağlayan x in pozitif en küçük değeri kaçtır?

45/2

$\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = 4\cos 2\alpha$ (sin) (cos)

$\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x} = 4\cos 2\alpha$

$\frac{1}{\frac{1}{2}\sin 2\alpha} = 4\cos 2\alpha$

$1 = 2\sin 2\alpha . \cos 2\alpha$

$1 = \sin 4\alpha$

$4\alpha = 90 + k.2\pi$

$\alpha = 90/4 + k.\frac{\pi}{2}$

Örnek...13 :

2cosx<cotx eşitsizliğinin (0,90) aralığında çözüm kümesini bulunuz

45

$\frac{2\cos x}{1} < \frac{\cos x}{\sin x} \Rightarrow \frac{2\sin x.\cos x}{\sin x} < \frac{\cos x}{\sin x}$ (sinx) sin2x (0,30)

$\sin 2x < \cos x$

$\sin 2x < \sin(90-x)$

$2x < 90 - x$ (0,30)

$3x < 90$

$x < 30$

www.matbaz.com

DEĞERLENDİRME

1) $\cos^2 2x - \sin^2 2x = \sin x$ denkleminin $(0,180)$ arasında kaç kökü vardır?

$\cos 4x = \cos(90 - x)$

$4x = 90 - x + k.360$ $\quad 4x = -90 + x + k.360$

$x = 18 + k.72$ $\quad x = -30 + k.120$

$k = 0,1,2$ $\quad k = 1$

4 değer

2) $\tan(4x-20).\tan(2x)=1$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz?

$\tan(4x-20) = \frac{1}{\tan 2x} = \cot 2x = \tan(90-2x)$

$4x - 20 = 90 - 2x + k.180$

$6x = 110 + k.180$

$x = \frac{110}{6} + k.30$

3) $\sec x = 2$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz?

$\frac{1}{\cos x} = 2 \rightarrow \cos x = \frac{1}{2} = \cos 60$

$x = 60 + k.360$ ✓ $x = -60 + k.360$

4) $2\cos^2 x - 3\cos x - 2 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz?

$(2\cos x - 1)(\cos x + 1) = 0$

$\cos x = \frac{1}{2}$ ✓ $\cos x = -1$

$x = \pm 60 + k.360$ $\quad x = 180 + k.360$

5) $\cos^2 x - \sin^2 x = 2\sin 2x - \cos 2x$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz?

$\cos 2x$

$2\cos 2x = 2\sin 2x$

$\tan 2x = 1$

$2x = 45 + k.180$

$x = \frac{45}{2} + k.90$

6) $\sin x - \tan 60.\cos x = 1$ denkleminin en küçük kökü kaçtır?

$\sin x - \frac{\sin 60}{\cos 60}.\cos x = 1$

$\sin x \cos 60 - \sin 60 \cos x = \cos 60$

$\sin(x-60) = \cos 60 = \sin 30$

$x - 60 = 30 + k.360$ ✓ $x - 60 = 150 + k.360$

$x = 90 + k.360$ ✓ $x = 210 + k.360$

$x_{min} = 90$ //

7) $\sin x + \cos x = 1$ denkleminin kökler toplamı kaçtır? (çözüm kümesi)

$\sin x + \frac{\sin 45}{\cos 45}.\cos x = 1$ $\quad \frac{\sin x \cos 45 + \sin 45 \cos x}{\cos 45} = 1$

$\sin(x+45) = \cos 45 = \sin 45$

$x + 45 = 45 + k.360$ ✓ $x + 45 = 135 + k.360$

$x = k.360$ ✓ $x = 90 + k.360$

8) $\frac{1}{1-\cos x} + \frac{1}{1+\cos x} = \frac{4}{3}$ denkleminin $(0,500)$ aralığında kaç kökü vardır?

$\frac{1+\cos x + 1 - \cos x}{1 - \cos^2 x} = \frac{4}{3}$ $\quad \frac{2}{\sin^2 x} = \frac{4}{3}$

$\sin^2 x = \frac{6}{4}$ $\quad \sin x > 1$ ✓ $\sin x < -1$

$\Rightarrow G = \emptyset$

kök yoktur.

9) $\cos^3 x + 2\sin^3 x = 3\cos x \sin^2 x$ denklemini sağlayan dar açı kaç derecedir?

$1 + 2\tan^2 x = 3\tan^2 x$ → ifadeyi $\cos^3 x$'e bölelim

$2\tan^3 x - 3\tan^2 x + 1 = 0$

$(\tan x - 1)(2\tan^2 x - \tan x - 1)$

$(\tan x - 1)(2\tan x + 1).(\tan x - 1) = 0$

$\tan x = 1$ ✓ $\tan x = -\frac{1}{2}$

$x = 45° + k.180$ $\quad x = \arctan\left(-\frac{1}{2}\right) + k.\pi$

10) $a.\sin x + b.\cos x = c$ denkleminin çözüm kümesinin boş olmaması için a, b ve c arasında hangi bağıntı olmalıdır?

$\sin x + \frac{b}{a}\cos x = \frac{c}{a}$ $\quad \frac{b}{a} = \tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

$\sin x \cos\alpha + \sin x \cos\alpha = \cos\alpha . \frac{c}{a}$

$-1 \le \sin(x+\alpha) = \cos\alpha . \frac{c}{a} \le 1$

$-1 \le \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} . \frac{c}{a} \le 1 \Rightarrow -\sqrt{a^2+b^2} \le c \le \sqrt{a^2+b^2}$

www.matbaz.com