ÖKLİD ALGORİTMASI

EBOB

İkisi birden sıfır olmayan a ve b tam sayılarının ikisini birden bölen en büyük pozitif tam sayıya bu sayıların **en büyük ortak böleni** (EBOB -eski OBEB-) denir ve EBOB(a,b)=x biçiminde gösterilir.

EBOB(24,36)=?

Çözüm

1. yol

36 bölenleri 1,2,3,4,6,9,12,18,36

24 bölenleri 1,2,3,4,6,8,12,24

2.yol

36	24	2	*
18	12	2	*
9	6	2	
9	3	3	*
3	1	3	
1			

obeb(36,24)=$2^2.3$=12
(işaretliler)

3.yol

$36=2^2.3^2$
$24=2^3.3^1$

obeb(36,24)=$2^2.3^1$ (Ortak en büyük çarpanlar)

EBOB ÖZELLİKLERİ

1) EBOB(a,b)=EBOB(b,a)=EBOB(−a,b)

2) EBOB(a,b)=1 ise a ile b aralarında asal sayıdır.

3) EBOB(a,b) ⩽ min{|a|,|b|}

4) EBOB(a,b)=EBOB(a,b+k.a) (Bu özellik ve uygulamaları 4. sayfada)

İki sayının en büyük ortak bölenini bu 3 yoldan farklı olarak Öklid algoritması ile de bulabiliriz. Şimdi bunu öğrenelim.

ÖKLİD ALGORİTMASI

A ve B sayılarının obeb' ini bulmak için Öklid algoritmasını kullanabiliriz. Bu algoritma da

Adım 1) Büyük sayı küçük sayıya bölünür.

$$\begin{array}{r|l} A & B \\ \cline{2-2} - \quad & C \\ \hline K & \end{array}$$

Adım 2) Kalan 0 ise obeb o bölmenin bölenidir.

Adım 3) Kalan 0 değilse, ilk bölmenin böleni kalanına tekrar bölünür ve kalan 0 olana kadar böyle yapılır. Sıfır kalanına ulaşılınca adım 2) gereği ebob bulunmuş olur.

Örnek...1 :

Obeb(60,15) kaçtır?

Öklit algoritmasına göre,

$$\begin{array}{r|l} 60 & 15 \\ \cline{2-2} - \quad & 4 \\ \hline 0 & \end{array}$$

olduğundan,

OBEB(60,15)=15 tir.

Burada 60=4.15+0 obeb (60,15)=15

Örnek...2 :

OBEB(60,36) kaçtır?

Çözüm :

Öklit algoritmasına göre;

Adım 1)

$$\begin{array}{r|l} 60 & 36 \\ \cline{2-2} -\ 36 & 1 \\ \hline 24 & \end{array}$$

Adım 2)

$$\begin{array}{r|l} 36 & 24 \\ \cline{2-2} -\ 24 & 1 \\ \hline 12 & \end{array}$$

Adım 3)

$$\begin{array}{r|l} 24 & 12 \\ \cline{2-2} -\ 24 & 2 \\ \hline 0 & \end{array}$$

OBEB(60,36)=12 dir.

Burada
60=1.36+24
36=1.24+12
24=2.12+0 obeb(60,36)=12
(ayrıca buradaki işlemlerle obeb(60,36)=obeb(36,24)=obeb(24,12) =obeb(12,0)=12 olduğunun farkına varınız.Bu kısım 4. sayfada detaylı incelenecektir)

Örnek...3 :

Obeb(420,182) kaçtır? Öklit algoritmasıyla hesaplayınız.

14

$$\begin{array}{r|l} 420 & 182 \\ -\,364 & 2 \\ \hline 56 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 182 & 56 \\ -\,168 & 3 \\ \hline 14 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 56 & 14 \\ -\,56 & 4 \\ \hline 0 & \end{array}$$

Burada
420=2.182+56

182=3.56+14

56=4.14+0 obeb(420,182)=14

Örnek...4 :

Obeb(336,90) kaçtır? Öklit algoritmasıyla hesaplayınız.

6

ax+by=c=obeb(a,b) denkleminde (x,y) tam sayı ikilisi çözümleri öklit algoritmasıyla bulunabilir.

Örnek...5 :

Ebob(48,30)=x.48+y.30
denkleminin tam sayılar kümesinde çözümlerinden bir tanesini öklit algoritmasıyla bulunuz.

(2,−3)

Çözüm

Öklit algoritmasıyla denklemi çözerken algoritmayı bitirdikten sonra, sondan ikinci adımdan itibaren, alttan yukarı doğru kalanlar yalnız bırakılarak sonuca gidilir.

48= 1.30+18 (burada 18=48-1.30 yazılabilir)

30=1.18+12 (burada 12=30-1.18 yazılabilir)

18=1.12+6 (burada 6=18-1.12 yazılabilir)

12=2.6+0 (obeb adımı obeb=6)

Burada ebob bulunan son adımı çıkarıp alttan yukarı doğru gidersek önce 6 yı yazalım

6=18-1.12

şimdi 12 yerine 12=30-1.18 yazalım

6=18-1.(30-1.18)= 2.18-1.30 (düzenledik)

şimdi 18 yerine 48-1.30 yazalım

6=2.(48-1.30)-1.30=2.48-3.30 (düzenledik)

6=2.48-3.30 ise
buradan da x=2 y=-3 çözümlerden biri olarak elde edilebilir.

Örnek...6 :

Ebob(308,196)= 196.x+308.y=28
denkleminin tam sayılar kümesinde çözümlerinden bir tanesini öklid algoritmasıyla bulunuz.

(-3,2)

Öklit algoritmasıyla denklemi çözerken algoritmayı bitirdikten sonra, sondan ikinci adımdan itibaren, alttan yukarı doğru kalanlar yalnız bırakılarak sonuca gidilir.

308= 1.196+112 (burada 112=308-1.196)

196=1.112+84 (burada 84=196-1.112)

112=1.84+28 (burada 28=112-1.84)

84=3.28+0 obeb adımı

Burada ebob bulunan son adımı çıkarıp alttan yukarı doğru gidersek önce 6 yı yazalım

28=112-1.84

şimdi 84 yerine 196-1.112 yazalım

28=112-1.(196-112)=2.112-1.196 (düzenledik)

şimdi 112 yerine 308-1.196 yazalım

28=2.(308-1.196)-1.196=2.308-3.196 (düzenledik)

28=2.308-3.196 ise
buradan da x=-3 y=2 çözümlerden biri olarak elde edilebilir.

BİLGİ

a, b ve c tam sayılar olmak üzere,
a.x+b.y=c
eşitliğini sağlayan (x,y) ikililerinden biri **(β, θ)** ise **(β+b, θ−a)** ikilisi de bu eşitliği sağlar.
Yani x bileşeni y nin katsayı kadar **artarken** (**azalırken**), y bileşeni x in katsayısı kadar **azalır** (**artar**).

Dolayısıyla (-3,2) dışında bir çözüm de (305,-194) olur

Örnek...7 :

364.x+130.y=Ebob(130,364)
denkleminin tam sayılar kümesinde çözümlerinden bir tanesini öklit algoritmasıyla bulunuz.

(-1,3)

ÖZELLİK 4

EBOB(a,b)=EBOB(a,b+k.a)
yani iki sayının ebobu ile bu sayılardan herhangi biri ile diğerinin k katının toplamı veya farkı, aynı ebob değerine sahiptir.
Yani
Adım 1 sayılardan birini sabit tutulur (değiştirilmez)
Adım 2 sabit tutulan sayının k katı diğer sayıya eklenir veya çıkarılır ve yeni sayı bulunur
Adım 3 Sabit tutulan sayı ile yeni sayının ebobu ile baştaki ebob aynıdır. (ebob değişmedi)

Örneğin obeb (36,24)=obeb(36,96)
Nasıl oldu? 1.sayı 36 ve 2.sayı 24 düşünüldü, birinci sayı sabit tutulup bu sayının 2 katı 2.sayıya eklendi.

Veya benzer şekilde
obeb (36,24)=obeb(12,24) yazılabilir
1.sayıyı 36 ve 2.sayıyı 24 düşündük, ikinci sayıyı değiştirmedik, bu sayının 1 katını 1.sayıdan çıkardık.

Obeb(36,24)=obeb(36,96)=obeb(12,24)

Genelde de sayıların birbirinden katını çıkartıp, küçülterek obeb i elde ederiz. Bu yol izlenirken sayılardan biri 0 yapılana kadar işlem devam eder

Şimdi öklid algoritmasının başka bir ifade şekli olan bu yola bakalım

Örnek...8 :

obeb(64,36)=?

Çözüm

obeb(64,36)=obeb(64-1.36,36)=obeb(28,36)
=obeb(28,36-1.28)=obeb(28,8)=obeb(28-3.8,8)
=obeb(4,8)=obeb(4,8-2.4)=obeb(4,0)=4

kısaca
obeb(64,36)=obeb(28,36)=obeb(28,8)
=obeb(4,8)=obeb(4,0)=4

ayrıca önceden
<u>64</u>=1.<u>36</u>+<u>28</u>
<u>36</u>=1.<u>28</u>+<u>8</u>
<u>28</u>=3.<u>8</u>+4
<u>8</u>=2.<u>4</u>+<u>0</u> yazdığımızı da unutmayalım. Burada altı çizilmiş sayıların ebob u aynıdır

Örnek...9 :

obeb(420,182)=?

Çözüm

obeb(420,182)=obeb(420-2.182,182)=obeb(56,182)=
obeb(56,182-3.56)=obeb(56,14)=obeb(56-4.14,14)
=obeb(0,14)=14

kısaca
obeb(420,182)=obeb(56,182)=obeb(56,14)
=obeb(0,14)=14

Örnek...10 :

x bir tam sayı olmak üzere , obeb(8x+5,3x-2) kaç farklı değer alır?

obeb(8x+5,3x-2)=obeb(2x+9,3x-2)
=obeb(2x+9,x-11)=obeb(31,x-11) bu sayı da 31 in böleni olmalıdır. Dolayısıyla 1 veya 31 olabilir (2 değer)

başka bir ifadeyle
8x+5=2.(3x-2)+2x+9
3x-2=1.(2x+9)+x-11
2x+9=2(x-11)+31
x-11=?.31+? -----------buradan x-11 ile 31 in ebobuna baktığımızı anlıyoruz

Örnek...11 :

x bir tam sayı olmak üzere ,
obeb(12x+16,2x+1) kaç farklı değer alır?

çözüm

obeb(12x+16,2x+1)=obeb(10,2x+1)
bu sayı da 10 un böleni olmalıdır.
Dolayısıyla obeb 1,2,5,10 olabilir gibi görünüyor ama verilen sayılardan 2x+1 sayısı tek olduğundan obeb 1 veya 5 olur.
(2 değer)

Örnek...12 :

x bir tam sayı olmak üzere ,
obeb(8x+6,4x-6) kaç farklı değer alır?

çözüm

obeb(8x+6,4x-6)=obeb(12,4x-6)
bu sayı da 12 nin böleni olmalıdır.

Dolayısıyla obeb 1,2,3,4,6 veya 12 olabilir gibi görünüyor ama verilen sayılardan ikisi de çift olduğundan obeb 1 veya 3 olamaz, ayrıca 8x+6, 4 ün katı olamaz. Obeb 2 veya 6 olabilir. (2 değer alır)

Örnek...13 :

$\frac{3x+8}{7x+25}$ kesrinin sadeleştirilebilir olmasını sağlayan x tamsayılarını bulunuz?

çözüm

obeb(7x+25,3x+8)=(x+9,3x+8)
=obeb (x+9,-19) bu ifade daha ileri gitmez ve madem ki kesir sadeleşiyor, obeb 19 sayısının böleni olmalıdır. 19 sayısı ise asal olduğundan obeb(7x+25,3x+8)=(x+9,-19)=19 olmalı demek ki x+9=19.k ve x=19.k-9 biçiminde bir sayıdır.

Ç={ $x : x = 19k - 9, k \in \mathbb{Z}$ }
={...-9,10,29,...,19k-29,...}

not burada

Örnek...14 :

$11x+7, 3x+5$ sayılarının aralarında asal olmamasını sağlayan en küçük üç basamaklı x çift tamsayısı kaçtır?

çözüm

obeb(11x+7, 3x+5) $\neq$ 1 olmalı
obeb(11x+7, 3x+5)=obeb(2x-8,3x+5)
=obeb(2x-8,x+13)= obeb(-34,x+13) ve bu obeb değeri 1 den farklı 2,17 veya 34 olabilir (34 ün bölenleri)
x+13=2k
x+13=17k
x+13=34k biçimlerinden biri olmalıdır.

x+13=2k ise x=2k-13 ve k ya değerler verilerek x sayısı tüm tek sayılar olabilir

x+13=17k ise x=17k-13 ve burada k 7 verilirse en küçük 3 basamaklı çift x sayısı 106 olarak bulunur.