

DİZİLER-3

GEOMETRİK DİZİ-TOPLAM SEMBOLÜ

GEOMETRİK DİZİ

Bir (a_n) dizisinin ardışık terimleri arasındaki oranı aynı sabit sayı ise, bu diziye geometrik dizi denir.

$\forall n \in \mathbb{N}^+$, $\frac{a_{n+1}}{a_n} = r$ ise, (a_n) ortak çarpanı r olan geometrik dizidir.

Örnek...1 :

$(a_n) = (2 \cdot 3^n)$ dizisinin geometrik dizi olup olmadığını inceleyelim.

✓

GEOMETRİK DİZİNİN ÖZELLİKLERİ

(a_n) ortak farkı r olan bir aritmetik dizi olsun

özellik 1

$$a_1 = a_1$$

$$a_2 = a_1 \cdot r$$

$$a_3 = a_2 \cdot r = a_1 \cdot r^2$$

$$a_4 = a_1 \cdot r^3$$

⋮

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

Örnek...2 :

$(a_n) = (2, 10, 50, \dots)$ geometrik dizisinde 5. terim kaçtır ?

1250

Örnek...3 :

İlk terimi 3, ortak çarpanı 2 olan bir geometrik dizinin 6. terimi kaçtır?

96

Örnek...4 :

Pozitif terimli ve ilk terimi $\frac{1}{250}$ olan bir geometrik dizinin 7. terimi $\frac{125}{2}$ ise ortak çarpanı kaçtır?

5

Örnek...5 :

Ortak çarpanı $\frac{1}{2}$ olan bir geometrik dizinin 8. terimi 512 ise ilk terimi kaçtır?

2^{16}

Özellik 2

$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$ ise $\frac{a_n}{a_1} = r^{n-1}$ veya daha genel

olarak $\frac{a_x}{a_y} = r^{x-y}$

Örnek...6 :

Bir (a_n) geometrik dizisinin ilk terimi $\frac{1}{2}$ ve ortak çarpanı $\sqrt[5]{2}$ olan dizinin 16. terimini bulalım.

4

Örnek...7 :

Bir (a_n) pozitif terimli geometrik dizide, $a_2 = 4$ ve $a_7 = 128$ olduğuna göre, a) 5. terimi b) genel terimini bulunuz.

$8, 2^n$

DİZİLER-3

GEOMETRİK DİZİ-TOPLAM SEMBOLÜ

Örnek...8 :

2/3 ile 1/48 arasına bu sayılar hariç 4 sayı yerleştirilerek 6 terimli azalan bir geometrik dizi elde ediliyor. Bu dizinin 2. terimi kaçtır?

1/3

Özellik 3

Bir geometrik dizide $a_p^2 = a_{p-k} \cdot a_{p+k}$ yani geometrik bir dizide bir terim kendisine eşit uzaklıktaki terimlerin geometrik ortalamasıdır.

Örnek...9 :

Onuncu terimi 8 olan bir geometrik dizinin 7. ve 13. terimleri çarpımı kaçtır?

64

Örnek...10 :

Bir geometrik dizinin ardışık üç terimi $x-1, x, x+3$ ise göre x kaçtır?

3/2

Özellik 4

Sonlu bir geometrik dizide baştan ve sondan eşit uzaklıktaki herhangi iki terimin çarpımı aynı sabit sayıya eşittir.

(a_n) sonlu geometrik dizi olsun.

$(a_n) = (a_1, a_2, \dots, a_n)$

$a_1 \cdot a_n = a_2 \cdot a_{n-1} = \dots = a_k \cdot a_{n-k+1} = \dots$

Örnek...11 :

Üçüncü terimi 20 olan bir geometrik dizinin ilk 5 terimi çarpımı kaçtır?

20⁵

Örnek...12 :

Bir geometrik dizide, $a_{37} \cdot a_{43} = A$ olduğuna göre, a_{40} türünden nedir? ($A \geq 0$)

\sqrt{A}

Örnek...13 :

Bir geometrik dizinin ardışık üç teriminin toplamı 26, çarpımı 216 dir. Bu üç terimden en küçük olanı nedir?

2

Örnek...14 :

Bir (a_n) geometrik dizisinde $a_7 = \log_{125}$, $a_{17} = 1 + \log_5 2$ ise a_{12} kaç olabilir?

$\pm \sqrt{3}$

DİZİLER-3

GEOMETRİK DİZİ-TOPLAM SEMBOLÜ

Örnek...15 :

Bir geometrik dizinin ardışık altı terimi sırasıyla $x, y, 60, 1/3, z, t$ olduğuna göre, $x.y.z.t$ çarpımının değeri kaçtır?

400

Örnek...16 :

$(a, 2a-2, b-4)$ sonlu dizisi hem aritmetik hem de geometrik dizi olduğuna göre, $a.b$ nin değeri kaç olur?

12

Özellik 5

(x_n) geometrik dizi ise ,bu geometrik dizinin ilk n terim toplamı $S_n = x_1 \cdot \left(\frac{r^n - 1}{r - 1}\right)$
Burada $r \geq 1$ için toplam sınırsız olarak büyür. $0 < r < 1$ ise toplam bir gerçek sayıya yaklaşır.

Örnek...17 :

Bir (a_n) geometrik dizisinde, $a_1 = 4$ ve ortak çarpan 2 ise ilk n terim toplamını bulunuz.

$2^{12} - 4$

Örnek...18 :

Bir pozitif terimli (a_n) geometrik dizisinde, $a_4 = 3$, $a_6 = 147$ ise ilk 4 terim toplamını bulunuz.

1200/343

Örnek...19 :

İlk n terim toplamı $S_n = 1 - 2^{-n}$ olan bir geometrik dizinin beşinci terimi kaç olur?

1/32

$1 + r + r^2 + \dots + r^N = \sum_{k=0}^N r^k$ biçiminde kısaca toplam sembolü kullanılarak da (\sum) gösterilebilir.

Örnek...20 :

$\sum_{k=2}^3 (2k+1)$ toplamının değeri kaçtır?

12

Örnek...21 :

$\sum_{k=0}^N x^k$ toplamının $x = \frac{1}{2}$ ve $x=2$, N sayısı büyürken nasıl değişir?

$2, \infty$

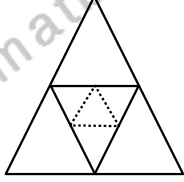
$$1 + r + r^2 + \dots + r^N + \dots = \frac{1}{1-r}, \quad |r| < 1$$

DİZİLER-3

GEOMETRİK DİZİ-TOPLAM SEMBOLÜ

Örnek...22 :

Bir kenarı 12 cm olan eşkenar üçgenin kenarlarının orta noktaları birleştirilerek iç içe yeni eşkenar üçgenler elde ediliyor. Oluşan üçgenlerin



- a) toplam çevreleri kaç birimdir?
b) toplam alanları kaç birim karedir?

$$72,48\sqrt{3}$$

Örnek...23 :

Bir top 72 m yükseklikten bırakılıyor ve yere her çarpışında bir önceki yüksekliğinin $\frac{2}{3}$ ü kadar yükseliyor. Topun durana kadar aldığı yatay yol kaç birimdir?

$$360$$

Özellik 6

(a_n) geometrik dizi ise ,bu geometrik ilk n terim çarpımı $\prod_{n=1}^n a_n = \sqrt[n]{a_n \cdot a_1^n}$

Örnek...24 :

Bir (a_n) geometrik dizisinde, $a_1 = 2$ ve ortak çarpan 8 ise ilk altı terim çarpımını bulunuz.

$$2^{51}$$

DİZİLER-3

GEOMETRİK DİZİ-TOPLAM SEMBOLÜ

DEĞERLENDİRME

1) $(x_n) = \left(\frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$ ise a_3 kaçtır?

13/27

2) Bir geometrik dizinin terimleri için

$a_9 + a_{13} = 162$, $a_4 + a_9 = 2$ ise bu dizinin ortak çarpanı kaçtır?

-3, +3

3) Bir (a_n) geometrik dizisinin ilk terimi 1 ve ortak çarpanı $\sqrt[8]{2}$ olan dizinin 65. terimi kaçtır?

2^8

4) Bir (a_n) geometrik dizisinin ilk terimi $1/256$ ve ortak çarpanı 2 ise bu dizinin ilk 20 terimi çarpımı kaçtır?

2^{30}

5) $(x, y, x^2 - x)$ sonlu dizisi hem aritmetik hem geometrik diziye $x+y$ en çok kaçtır?

4

6) Pozitif terimli (a_n) geometrik dizisinde ilk 7 terim çarpımı $e^{21 \ln 6}$ olduğuna göre, dizinin 4. terimi kaçtır?

216

7) Bir geometrik dizinin ilk 8 terim toplamının ilk 4 terim toplamına oranı 626 ise , bu dizinin ortak çarpanı kaçtır?

+5, -5

8) Bir kenarı 8 cm olan karenin kenarlarının orta noktaları birleştirilerek yeni bir kare elde ediliyor. Bu işlem sonsuz kere tekrar ediliyor. Elde edilen karelerin alanları toplamı kaç birim karedir?

128