

GEOMETRİK DİZİ

Bir (a_n) dizisinin ardışık terimleri arasındaki oranı aynı sabit sayı ise, bu diziye geometrik dizi denir.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{a_{n+1}}{a_n} = r$ ise, (a_n) ortak çarpanı r olan geometrik dizidir.

Örnek...1 :

$(a_n) = (2 \cdot 3^n)$ dizisinin geometrik dizi olup olmadığını inceleyelim.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2 \cdot 3^{n+1}}{2 \cdot 3^n} = 3 = \text{sabit} \checkmark$$

GEOMETRİK DİZİNİN ÖZELLİKLERİ

(a_n) ortak farkı r olan bir aritmetik dizi olsun

özellik 1

$$a_1 = a_1$$

$$a_2 = a_1 \cdot r$$

$$a_3 = a_2 \cdot r = a_1 \cdot r^2$$

$$a_4 = a_1 \cdot r^3$$

⋮

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

Örnek...2 :

$(a_n) = (2, 10, 50, \dots)$

geometrik dizisinde 5. terim kaçtır ?

$$\begin{aligned} a_1 &= 2 & a_n &= 2 \cdot 5^{n-1} \\ a_2 &= 10 & a_5 &= 2 \cdot 5^4 = 2 \cdot 625 \\ a_3 &= 2 \cdot 5^2 & &= 1250 \end{aligned}$$

Örnek...3 :

İlk terimi 3, ortak çarpanı 2 olan bir geometrik dizinin 6. terimi kaçtır?

$$\begin{aligned} x_1 &= 3 & x_6 &= x_1 \cdot r^5 \\ r &= 2 & &= 3 \cdot 2^5 \\ x_6 &=? & &= 3 \cdot 32 \\ & & &= 96 // \end{aligned}$$

Örnek...4 :

Pozitif terimli ve ilk terimi $\frac{1}{250}$ olan bir geometrik dizinin 7. terimi $\frac{125}{2}$ ise ortak çarpanı kaçtır?

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{250} & x_7 &= \frac{125}{2} \\ x_7 &= x_1 \cdot r^6 \Rightarrow \frac{125}{2} = \frac{1}{250} \cdot r^6 \\ 5^6 &= r^6 \\ r &= 5 // \end{aligned}$$

Örnek...5 :

Ortak çarpanı $\frac{1}{2}$ olan bir geometrik dizinin 8. terimi 512 ise ilk terimi kaçtır?

$$r = \frac{1}{2} \quad x_8 = 512 \quad x_1 = ?$$

$$\begin{aligned} 512 &= x_1 \cdot r^7 \\ \frac{512}{\left(\frac{1}{2}\right)^7} &= x_1 \Rightarrow x_1 = 2^{16} \end{aligned}$$

Özellik 2

$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$ ise $\frac{a_n}{a_1} = r^{n-1}$ veya daha genel

olarak $\frac{a_x}{a_y} = r^{x-y}$

Örnek...6 :

Bir (a_n) geometrik dizisinin ilk terimi $\frac{1}{2}$ ve ortak çarpanı $\sqrt[5]{2}$ olan dizinin 16. terimini bulalım.

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{2} & r &= \sqrt[5]{2} & a_{16} &=? \\ a_{16} &= a_1 \cdot r^{15} \\ a_{16} &= \frac{1}{2} \cdot \left(2^{\frac{1}{5}}\right)^{15} \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot 2^3 = 4 \end{aligned}$$

Örnek...7 :

Bir (a_n) pozitif terimli geometrik dizide, $a_2 = 4$ ve $a_7 = 128$ olduğuna göre, a) 5. terimi b) genel terimini bulunuz.

$$\begin{aligned} a_2 &= 4 & a_7 &= 128 \\ \frac{a_7}{a_2} &= r^5 \Rightarrow \frac{128}{4} = r^5 & r &= 2 \end{aligned}$$

$$\frac{a_5}{a_4} = r^{5-2} \quad a_5 = 2^3 = 8 // \quad 114$$

$$38 \quad b) \quad \frac{a_n}{a_2} = r^{n-2} \Rightarrow a^n = 4 \cdot 2^{n-2} = 2^n //$$

Örnek...8 :

2/3 ile 1/48 arasına bu sayılar hariç 4 sayı yerleştirilerek 6 terimli azalan bir geometrik dizi elde ediliyor. Bu dizinin 2. terimi kaçtır?

$$x_1 = \frac{2}{3} \quad x_6 = \frac{1}{48}$$

$$x_6 = x_1 \cdot r^5 \Rightarrow \frac{1}{48} = \frac{2}{3} \cdot r^5 \Rightarrow r = \frac{1}{2}$$

$$x_2 = x_1 \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow x_2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$$

Özellik 3

Bir geometrik dizide $a_p^2 = a_{p-k} \cdot a_{p+k}$ yani geometrik bir dizide bir terim kendisine eşit uzaklıktaki terimlerin geometrik ortalamasıdır.

Örnek...9 :

Onuncu terimi 8 olan bir geometrik dizinin 7. ve 13. terimleri çarpımı kaçtır?

$$a_7 \quad \underbrace{a_{10}}_8 \quad a_{13}$$

$$a_{10}^2 = a_7 \cdot a_{13} = 64$$

Örnek...10 :

Bir geometrik dizinin ardışık üç terimi $x-1, x, x+3$ ise göre x kaçtır?

$$x-1 \quad x \quad x+3$$

$$x^2 = (x-1) \cdot (x+3) \Rightarrow x^2 = x^2 + 2x - 3$$

$$x = \frac{3}{2}$$

Özellik 4

Sonlu bir geometrik dizide baştan ve sondan eşit uzaklıktaki herhangi iki terimin çarpımı aynı sabit sayıya eşittir.

(a_n) sonlu geometrik dizi olsun.

$$(a_n) = (a_1, a_2, \dots, a_n)$$

$$a_1 \cdot a_n = a_2 \cdot a_{n-1} = \dots = a_k \cdot a_{n-k+1} = \dots$$

Örnek...11 :

Üçüncü terimi 20 olan bir geometrik dizinin ilk 5 terimi çarpımı kaçtır?

$$a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \quad a_5$$

$$a_1 \cdot a_5 = 20^2$$

$$a_2 \cdot a_4 = 20^2$$

$$a_3 = 20$$

$$G_5 = 20^{2+2+1} = 20^5$$

Örnek...12 :

Bir geometrik dizide,

$a_{37} \cdot a_{43} = A$ olduğuna göre, $a_{40} \cdot A$ türünden nedir? ($A \geq 0$)

$$a_{40}^2 = \underbrace{a_{37} \cdot a_{43}}_A \Rightarrow A_{40}^2 = A$$

$$a_{40} = \sqrt{A}$$

Örnek...13 :

Bir geometrik dizinin ardışık üç teriminin toplamı 26, çarpımı 216 dir. Bu üç terimden en küçük olanı nedir? en az kaçtır?

$$\frac{x_1}{r} + x_1 + x_1 \cdot r = 26$$

$$\frac{x_1}{r} \cdot x_1 \cdot x_1 \cdot r = 216 \Rightarrow x_1 = 6$$

$$\frac{6}{r} + 6 + 6r = 26 \Rightarrow 6r^2 + 6r + 6 = 26r$$

$$r = \frac{1}{3} \Rightarrow 6 \cdot \frac{1}{3} = 2$$

$$6r^2 - 20r + 6 = 0$$

$$3r^2 - 10r + 3 = 0$$

$$3r \quad -1 \quad r=3$$

$$r = \frac{1}{3}$$

Örnek...14 :

Bir (a_n) geometrik dizisinde

$a_7 = \log 125, a_{17} = 1 + \log_5 2$ ise a_{12} kaç olabilir?

$$a_{12}^2 = a_7 \cdot a_{17}$$

$$\log 125 \cdot (1 + \log_5 2)$$

$$\log 125 \cdot \log_5 10$$

$$a_{12}^2 = \frac{3 \log 5 \cdot \log_5 10}{\log 5} = 3$$

$$a_{12} = \pm \sqrt{3}$$

Örnek...15 :

Bir geometrik dizinin ardışık altı terimi sırasıyla $x, y, 60, 1/3, z, t$ olduğuna göre, $x.y.z.t$ çarpımının değeri kaçtır?

$$60 \cdot \frac{1}{3} = y \cdot z = x \cdot t$$

$$x \cdot y \cdot z \cdot t = 20 \cdot 20$$

$$= 400$$

Örnek...16 :

$(a, 2a-2, b-4)$ sonlu dizisi hem aritmetik hem de geometrik dizi olduğuna göre, a, b nin değeri kaç olur?

hem aritmetik hem geometrik bir dizi ise sabit dizedir.

$$2 = 2a - 2 = b - 4 \Rightarrow a = 2$$

$$b = 6$$

$$2 \cdot b = 12$$

Özellik 5

(x_n) geometrik dizi ise, bu geometrik dizinin ilk n terim toplamı $S_n = x_1 \cdot \left(\frac{r^n - 1}{r - 1} \right)$

Burada $r \geq 1$ için toplam sınırsız olarak büyür. $0 < r < 1$ ise toplam bir gerçek sayıya yaklaşır.

Örnek...17 :

Bir (a_n) geometrik dizisinde, $a_1 = 4$ ve ortak çarpan 2 ise ilk on terim toplamını bulunuz.

$$S_{10} = 4 \cdot \left[\frac{2^{10} - 1}{2 - 1} \right] = 2^{12} - 4$$

Örnek...18 :

Bir pozitif terimli (a_n) geometrik dizisinde, $a_4 = 3$, $a_6 = 147$ ise ilk 4 terim toplamını bulunuz.

$$26 = 24 \cdot r^2$$

$$147 = 3 \cdot r^2 \quad r = 7$$

$$24 = 21 \cdot r^3 \Rightarrow 3 = 7^3 \cdot a_1 \quad a_1 = \frac{3}{7^3}$$

$$S_4 = \frac{3}{7^3} \left[\frac{7^4 - 1}{7 - 1} \right] = \frac{3}{343} \cdot \frac{2400}{6} = \frac{1200}{343}$$

Örnek...19 :

İlk n terim toplamı $S_n = 1 - 2^{-n}$ olan bir geometrik dizinin beşinci terimi kaç olur?

$$\begin{aligned} a_5 &= S_5 - S_4 = (1 - 2^{-5}) - (1 - 2^{-4}) \\ &= \left(1 - \frac{1}{32}\right) - \left(1 - \frac{1}{16}\right) \\ &= \frac{1}{16} - \frac{1}{32} = \frac{1}{32} \end{aligned}$$

Özellik 6

(a_n) geometrik dizi ise, bu geometrik ilk n terim çarpımı $C_n = \sqrt[n]{a_n \cdot a_1^n}$

Örnek...20 :

Bir (a_n) geometrik dizisinde, $a_1 = 2$ ve ortak çarpan 8 ise ilk altı terim çarpımını bulunuz.

$$\begin{aligned} C_6 &= \sqrt[6]{(a_6 \cdot a_1)^6} \\ &= \sqrt[6]{(21 \cdot 8^5 \cdot 2)^6} \\ &= \left[(2 \cdot 8^5 \cdot 2)^6 \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= (2^{17})^6 \\ &= (2^{17})^3 \\ &= 2^{51} \end{aligned}$$

Örnek...21 :

Email yoluyla yayılan bir bilgisayar virüsü belli bir anda bir miktar kullanıcıya yollanıyor. Virüs bir kişiye bulaştıktan bir gün sonra, bulaştığı kişinin listesinde kayıtlı 2 kişiye kendini mail yoluyla bulaştırmaktadır. virüsün bulaştığı kişi sayısı 10.günde 10230 kişi olduğuna göre, virüs başlangıçta kaç kişiye bulaştırılmıştır? (farklı kişilerden aynı kişilere mail gitmediği ve kişilerin listelerinde 2 den fazla kişi olduğu varsayılacaktır)

ilk gün x kişiye bulaşsın

$$x, x+2x, x+2x+4x, \dots$$

$$a_{10} = x + 2x + 4x + \dots + 2^9 x = x \left(\frac{2^{10} - 1}{2 - 1} \right) = 10230$$

$$x = 10$$

DİZİLER-3

GEOMETRİK DİZİ-TOPLAM SEMBOLÜ

DEĞERLENDİRME

1) $(x_n) = \left(\frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$ ise a_3 kaçtır?

$$x_3 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3}$$

$$= \frac{9+3+1}{27} = \frac{13}{27}$$

2) Bir geometrik dizinin terimleri için

$a_8 + a_{13} = 162$, $a_4 + a_9 = 2$ ise bu dizinin ortak çarpanı kaçtır?

$$a_1 \cdot r^7 + a_1 \cdot r^{12} = 162$$

$$a_1 \cdot r^3 + a_1 \cdot r^8 = 2$$

$$\frac{r^4 \cdot r^7 (a_1 + a_1 r^5)}{r^3 (a_1 + a_1 r^5)} = 81$$

$$|r| = 3 \quad r = \pm 3$$

3) Bir (a_n) geometrik dizisinin ilk terimi 1 ve ortak çarpanı $\sqrt[3]{2}$ olan dizinin 65. terimi kaçtır?

$$a_1 = 1 \quad r = 2^{\frac{1}{3}}$$

$$a_{65} = a_1 \cdot r^{64} = 1 \cdot \left(2^{\frac{1}{3}}\right)^{64}$$

$$= 2^{\frac{64}{3}}$$

4) Bir (a_n) geometrik dizisinin ilk terimi $\frac{1}{256}$ ve ortak çarpanı 2 ise bu dizinin ilk 20 terimi çarpımı kaçtır?

$$a_1 = \frac{1}{256} \quad r = 2 \quad Q = 20$$

$$a_1 \cdot a_1 \cdot r \cdot a_1 \cdot r^2 \cdot \dots \cdot a_1 \cdot r^{19}$$

$$a_1^{20} \cdot r^{1+2+\dots+19} = a_1^{20} \cdot r^{190}$$

$$= \left(\frac{1}{256}\right)^{20} \cdot 2^{190}$$

$$= (2^{-8})^{20} \cdot 2^{190} = 2^{-160} \cdot 2^{190} = 2^{30}$$

5) $(x, y, x^2 - x)$ sonlu dizisi hem aritmetik hem geometrik diziye $x+y$ en çok kaçtır?

$$x = y = x^2 - x$$

$$x^2 - 2x = 0$$

$$x \cdot (x-2) = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{array}{l} x=0 \quad 0, 0, 0 \\ x=2 \quad 2, 2, 2 \end{array}$$

$$x+y = 4$$

6) Pozitif terimli (a_n) geometrik dizisinde ilk 7 terim çarpımı $\frac{e^{21 \ln 6}}{6^{21}}$ olduğuna göre, dizinin 4. terimi kaçtır?

$$x_1 \cdot x_1 r \cdot x_1 r^2 \cdot \dots \cdot x_1 r^6 = 6^{21}$$

$$x_1^7 \cdot r^{\frac{6 \cdot 7}{2}} = 6^{21}$$

$$x_1^7 \cdot r^{21} = 6^{21}$$

$$x_1 \cdot r^3 = 6^3 = x_4$$

7) Bir geometrik dizinin ilk 8 terim toplamının ilk 4 terim toplamına oranı 626 ise, bu dizinin ortak çarpanı kaçtır?

$$\frac{S_8}{S_4} = 626$$

$$x_1 \cdot \left(\frac{1-r^8}{1-r}\right) = \frac{1-r^8}{1-r}$$

$$x_1 \cdot \left(\frac{1-r^4}{1-r}\right) = \frac{1-r^4}{1-r}$$

$$\frac{(1-r^4) \cdot (1+r^4)}{1-r^4} = 626$$

$$r^4 = 625$$

$$r = \pm 5$$

$$= \left(\frac{1}{256}\right)^{20} \cdot 2^{190}$$

$$= (2^{-8})^{20} \cdot 2^{190} = 2^{-160} \cdot 2^{190} = 2^{30}$$