

TOPLAM SEMBOLÜ

$1+r+r^2+\dots+r^N=\sum_{k=0}^N r^k$ biçiminde kısaca toplam sembolü kullanılarak da $(\sum)$ gösterilebilir.

$\sum_{k=a}^b x_k$ ifadesinde k sayısına indis, a sayısına alt sınır, b sayısına üst sınır denir. x_k sayıları, k'nın a tamsayısından başlayıp birer artarak son olarak b değerini almasıyla son bulan toplamı yapılacak olan terimlerdir.

Örnek...1 :

$\sum_{k=-2}^3 (2k+1)$ toplamının değeri kaçtır?

$$\begin{aligned} & (2 \cdot -2 + 1) + (2 \cdot -1 + 1) + (2 \cdot 0 + 1) \\ & + (2 \cdot 1 + 1) + (2 \cdot 2 + 1) + (2 \cdot 3 + 1) \\ \Rightarrow & -3 + -1 + 1 + 3 + 5 + 7 \\ & = 12 \end{aligned}$$

Örnek...2 :

$\sum_{k=1}^{20} k \cdot (-1)^k$ işleminin sonucu kaçtır?

$$\begin{aligned} & 1 \cdot (-1)^1 + 2 \cdot (-1)^2 + 3 \cdot (-1)^3 + \dots + 20 \cdot (-1)^{20} \\ \Rightarrow & \underbrace{-1}_{1} + \underbrace{2}_{1} - 3 + 4 - \dots + 20 \\ & = 20 \end{aligned}$$

Örnek...3 :

$\sum_{k=1}^{20} \frac{1}{k^2+k}$ işleminin sonucu kaçtır?

$$\begin{aligned} \frac{1}{k^2+k} &= \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \\ \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{20} - \frac{1}{21} \\ &= 1 - \frac{1}{21} = \frac{20}{21} \end{aligned}$$

ARİTMETİK DİZİ

Bir (a_n) dizisinin rastgele ardışık terimleri arasındaki fark sabit sayı ise, bu diziyeye aritmetik dizi denir.

$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad a_{n+1} - a_n = r$
ise, (a_n) ortak farkı r olan aritmetik dizidir.

Örnek...4 :

$(a_n) = (2, 8, 14, 20, \dots, 2+6n, \dots)$ dizisi ortak farkı 6 olan bir aritmetik dizidir.

Örnek...5 :

Aşağıda genel terimi verilen diziler aritmetik midir?

a) $x_n = (2n+1)/3$ b) $a_n = 1/n$ c) $c_n = n!$

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad x_{n+1} - x_n &= \frac{2(n+1)+1}{3} - \frac{2n+1}{3} = \frac{2}{3} \text{ sabit} \\ \text{b)} \quad a_{n+1} - a_n &= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{-1}{n \cdot (n+1)} \text{ sabit değil} \end{aligned}$$

$$\text{c)} \quad c_{n+1} - c_n = (n+1)! - n! \text{ sabit değil}$$

ARİTMETİK DİZİNİN ÖZELLİKLERİ

a_n ortak farkı r olan bir aritmetik dizi olsun

özellik1

$$a_1 = a_1$$

$$a_2 = a_1 + r$$

$$a_3 = a_2 + r = a_1 + 2r$$

$$a_4 = a_1 + 3r$$

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

Örnek...6 :

İlk terimi 8 ortak farkı 5 olan bir aritmetik dizinin 50. terimi kaçtır?

$$\begin{aligned} a_{50} &= a_1 + 49r \\ &= 8 + 49 \cdot 5 \\ &= 8 + 245 \\ a_{50} &= 253 \end{aligned}$$

Örnek...7 :

İlk terimi 10 olan bir aritmetik dizinin 27. terimi 62 ise ortak farkı kaçtır?

$$x_1 = 10 \quad x_{27} = x_1 + 26r \quad 62 = 10 + 26r$$

$$52 = 26r \quad r = 2$$

Örnek...8 :

Ortak farkı 26 olan bir aritmetik dizinin 14. terimi 350 ise ilk terimi kaçtır?

$$a_{14} = a_1 + 13r$$

$$350 = a_1 + 13 \cdot 26$$

$$350 = a_1 + 338 \quad a_1 = 12$$

Özellik2

$a_n = a_1 + (n-1)r$ ise $\frac{a_n - a_1}{n-1} = r$ veya daha genel olarak $\frac{a_x - a_y}{x-y} = r$

Örnek...9 :

Birinci terimi 5, ortak farkı 4 olan aritmetik dizinin

a) genel terimini b) 5. terimini bulalım.

$$x_1 = 5 \quad r = 4 \quad x_n = ?$$

a) $x_n = x_1 + (n-1)r \Rightarrow 5 + (n-1)4$
 $\Rightarrow 4n + 1$

b) $4 \cdot 5 + 1 = 21$ } n yerine 5 yazdık

Örnek...10 :

Birinci terimi 2 ve ikinci terimi $7/2$ olan aritmetik dizinin

a) ortak farkını b) 10. terimini c) genel terimini bulunuz.

$$x_1 = 2 \quad x_2 = \frac{7}{2}$$

a) $r = x_2 - x_1 = \frac{7}{2} - 2 = \frac{3}{2}$

b) $x_{10} = x_1 + 9r = 2 + 9 \cdot \frac{3}{2} = \frac{31}{2}$

c) $\frac{x_n - x_1}{n-1} = r \Rightarrow \frac{x_n - 2}{n-1} = \frac{3}{2} \Rightarrow x_n = \frac{3}{2}(n-1) + 2$

Örnek...11 :

İlk terimi -2, ortak farkı 4 olan bir aritmetik dizinin kaçınıcı terimi 14 tür?

$$x_n = x_1 + (x_n - 1) \cdot r$$

$$x_n = -2 + 4x_n - 4$$

Örnek...12 :

Dördüncü terimi 14, onuncu terimi 38 olan bir aritmetik dizinin ikinci terimi nedir?

$$x_4 = 14 \quad x_{10} = 38 \quad x_2 = ?$$

$$x_{10} = x_1 + 9r$$

$$x_4 = x_1 + 3r$$

$$38 - 14 = 6r$$

$$r = 4$$

$$x_2 = x_1 + r$$

$$6 = 2 + 4$$

Örnek...13 :

Bir aritmetik dizinin a. terimi b, b. terimi a ise 4. terimi nedir?

$$x_a = b \quad x_b = a \quad x_4 = ?$$

$$\frac{x_a - x_b}{a - b} = \frac{x_a - x_4}{a - 4}$$

$$\frac{b - a}{a - b} = \frac{b - x_4}{a - 4}$$

$$-a + 4 = b - x_4$$

$$x_4 = a + b - 4$$

Örnek...14 :

5 ile 80 arasına bu terimler hariç 19 tane daha sayı yerleştirilerek artan bir sonlu aritmetik dizi elde ediliyor. Bu dizinin ortak farkı nedir?

$$x_1 = 5 \quad x_{21} = 80$$

$$x_{21} = x_1 + 20r$$

$$80 = 5 + 20r$$

$$r = \frac{15}{4}$$

Örnek...15 :

İlk terimi 9, ortak farkı 2 ve son terimi 27 olan sonlu bir aritmetik dizinin terim sayısı kaçtır?

$$x_1 = 9 \quad r = 2 \quad x_n = 27$$

$$\frac{x_n - x_1}{n-1} = r \Rightarrow \frac{27 - 9}{n-1} = 2$$

$$n-1 = 9$$

$$n = 10$$

$$-2 + 4x_n - 4 = 14$$

$$4x_n = 20$$

$$x_n = 5 //$$

Özellik3

Bir aritmetik dizide $a_p = \frac{a_{p-k} + a_{p+k}}{2}$

yani aritmetik bir dizide bir terim kendisine eşit uzaklıktaki terimlerin aritmetik ortalamasıdır.

Örnek...16 :

Onuncu terimi 15 olan bir aritmetik dizinin 9. ve 11. terimleri toplamı kaçtır?

$$a_{10} = 15 \quad a_9 + a_{11} = ?$$

$$\frac{a_9 + a_{11}}{2} = a_{10} \Rightarrow a_9 + a_{11} = 2 \cdot 15 = 30$$

Örnek...17 :

Üçüncü terimi 20 olan bir aritmetik dizinin ilk 5 terimi toplamı kaçtır?

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = ?$$

$\downarrow$
 20
 $\downarrow$
 40
 $\downarrow$
 100

Özellik4

Sonlu bir aritmetik dizide baştan ve sondan eşit uzaklıktaki herhangi iki terimin toplamı aynı sabit sayıya eşittir.

(a_n) sonlu aritmetik dizi olsun. $(a_n) = (a_1, a_2, \dots, a_n)$

$$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = \dots = a_k + a_{n-k+1} = \dots$$

Örnek...18 :

(a_n) bir aritmetik dizi olsun. $a_{10} = 15$ ve $a_5 = 7$ ise $a_7 + a_8$ kaçtır?

$$a_5 \quad a_6 \quad a_7 \quad a_8 \quad a_9 \quad a_{10}$$

$\downarrow$
 $a_7 + a_8 = a_{10} + a_5 = 22$

Örnek...19 :

Bir aritmetik dizinin 10. terimi 8 olduğuna göre 1. ve 19. terimleri toplamı nedir?

$$x_{10} = 8 \quad x_1 + x_{19}$$

$$x_1 + 9r = 8 \quad x_1 + x_1 + 18r = 2x_1 + 18r$$

$$= 2 \cdot (x_1 + 9r)$$

$\downarrow$
 8
 $= 16$

Özellik5

Bir aritmetik dizinin ilk n terim toplamı; S_n ile gösterilir ise

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \text{ dir.}$$

Örnek...20 :

Genel terimi $a_n = 5n - 2$ olan bir aritmetik dizinin ilk 20 terim toplamı nedir?

$$5 \cdot 1 - 2 + 5 \cdot 2 - 2 + 5 \cdot 3 - 2 + \dots + 5 \cdot 20 - 2$$

$$5(1+2+\dots+20) - 20 \cdot 2$$

$$\frac{5 \cdot 20 \cdot 21}{2} - 40 = 1050 - 40 = 1010 //$$

$$S_{20} = \frac{20}{2} \cdot [a_1 + a_{20}] = 10 \cdot (3 + 98) = 10 \cdot 101$$

Örnek...21 :

Bir aritmetik dizinin ilk 4 teriminin toplamı 10 ve ilk 8 teriminin toplamı 68 olduğuna göre bu dizinin 10 terimi nedir?

$$S_4 = 10 \quad S_8 = 68$$

$$a_{10} = ? \quad a_1 + 9r$$

$$-2 + 27 = 25 //$$

$$2 \cdot (a_1 + a_4) = 10 \Rightarrow a_1 + a_4 = 5$$

$$4 \cdot (a_1 + a_8) = 68 \Rightarrow a_1 + a_8 = 17$$

$$2a_8 - 2a_4 = 12$$

$$r = \frac{2a_8 - 2a_4}{8 - 4} = \frac{12}{4} = 3$$

$$a_1 + 21 \cdot 3 = 5$$

$$21a_1 + 9 = 5$$

$$21a_1 = -4$$

$$a_1 = -\frac{4}{21}$$

Örnek...22 :

İlk n teriminin toplamı $n^2 + 3n$ olan bir aritmetik dizinin

a) 4. terimi? b) ortak farkı kaçtır

$$a) S_4 = S_4 - S_3 = 4^2 + 3 \cdot 4 - (3^2 + 3 \cdot 3)$$

$$16 + 12 - 9 - 9 = 10$$

$$b) S_2 = a_1 + a_2 = 4 + 6 = 10$$

$$S_1 = a_1 = 4 \quad a_1 = 4 \quad a_2 = 6 \quad r = 2$$

Örnek...23 :

Şekilde bir kısmı görülen konser alanında en ön sırada 60 oturma yeri vardır. Her sırada bir önceki sıradan 4 kişilik fazla oturma yeri bulunmaktadır. Konser alanında toplam 1960 kişilik olduğuna göre, en arka sırada kaç kişiliktir?



$$a_1 = 60 \quad a_n = 60 + 4 \cdot (n-1)$$

$$S_n = \frac{n}{2} \cdot (60 + 60 + 4(n-1)) \quad a_{20} = 60 + 4 \cdot 19$$

$$1960 = \frac{n}{2} \cdot (116 + 4n) \quad = 136$$

$$3920 = 116n + 4n^2$$

$$380 = 29 + n^2$$

$$35 \quad n^2 + 29n - 380 = 0 \quad n = 20 \checkmark$$

$$-20 \quad n = 49 \times$$

DEĞERLENDİRME

1) $2+5+8+\dots+302=?$

$$\left(\frac{302-2}{3}+1\right) \cdot \left(\frac{302+2}{2}\right)$$

$$101 \cdot 152 = 15352$$

2) (a_n) bir aritmetik dizi olmak üzere,

$$a_2=5 \text{ ve } a_4 + a_6 + a_8 = 63$$

olduğuna göre, bu dizinin ilk terimi kaçtır?

$$-15 / 2+r=5$$

$$3a_1 + 15r = 63$$

$$-12a_1 = -75 + 63$$

$$-12a_1 = -12$$

$$a_1 = 1$$

3) $(a_n) = \left(\frac{1}{2}, 1, x, y, \dots\right)$ aritmetik dizisinin ilk 5 terimi çarpımı nedir?

$$r = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{3}{2} \cdot 2 \cdot \frac{5}{2} = \frac{15}{4}$$

$$1t \quad 2t \quad 3t \quad 4t \quad 5t$$

4) İlk n terimi toplamı $T_n = 5n - 2$ olan bir aritmetik dizinin 9. terimi kaçtır?

$$T_9 - T_8 = 29$$

$$(5 \cdot 9 - 2) - (5 \cdot 8 - 2) = 99$$

$$43 - 38 = 5 \Rightarrow 99$$

5) Bir aritmetik dizinin terimleri için

$a_{13} = 26$, $a_{19} = 34$ ise göre, bu dizinin ilk 31 terimi toplamı kaçtır?

$$2a_{16} = \frac{a_{13} + a_{19}}{2} = \frac{26 + 34}{2} = 30$$

$$= \frac{31}{2} \cdot (a_1 + a_{31}) = \frac{31}{2} \cdot 2a_{16} = 31 \cdot 30 = 930$$

6) (a_n) aritmetik dizisinde,

$$a_4 - a_2 = 10 \text{ ve } a_{20} = 103$$

olduğuna göre, a_{11} kaçtır?

$$(2_1 + 3r) - (a_1 + r) = 10$$

$$2r = 10 \quad r = 5$$

$$a_{20} = a_{11} + 9r$$

$$103 = a_{11} + 9 \cdot 5$$

$$\Rightarrow a_{11} = 103 - 45 = 58$$

7) İlk 40 terim toplamı 1200 olan dizinin ilk terimi ortak farkından 11 küçükse dizinin 41. terimini bulunuz.

$$x_1 = r - 11$$

$$S_{40} = 20 \cdot (x_1 + x_{40}) = 1200$$

$$x_1 + x_{40} = 60$$

$$2x_1 + 39r = 60$$

$$2 / r - x_1 = 11$$

$$41r = 82$$

$$r = 2 \Rightarrow x_1 = -9$$

$$x_{41} = x_1 + 40r = -9 + 40 \cdot 2 = 71$$

8) İlk n terim toplamı S_n olan bir aritmetik dizide,

$S_5 - S_4 = 20$, $S_7 = 10$ ise bu dizinin ortak farkı kaçtır?

$$S_5 - S_4 = a_5 = 20$$

$$S_7 = \frac{7}{2} (2a_1 + 6r) = 10$$

$$-2 / a_1 + 4r = 20$$

$$2a_1 + 6r = \frac{20}{7}$$

$$-2r = \frac{20}{7} - 40 = -\frac{260}{7}$$

$$r = \frac{130}{7}$$

- 9) Bir aritmetik dizinin terimleri için

$$a_4 + a_5 = 62$$

$$a_8 + a_{10} = 134$$

ise göre, bu dizinin ilk 10 terimi toplamı kaçtır?

$$2a_1 + 7r = 62$$

$$2a_1 + 16r = 134$$

$$9r = 72 \quad r = 8$$

$$2a_1 + 56 = 62 \quad a_1 = 3$$

$$S_{10} = \frac{10}{2} (a_1 + a_{10}) = \frac{10}{2} (2a_1 + 9r) \\ = 5 \cdot (6 + 72) = 390$$

- 10) Üç terimli bir aritmetik dizinin terimleri toplamı 3, terimlerinin karelerinin toplamı 21 olduğuna göre dizinin en küçük terimi en az kaç olabilir?

$$x_1 - r + x_1 + x_1 + r = 3 \quad x_1 = 1$$

$$(x_1 - r)^2 + x_1^2 + (x_1 + r)^2 = 21$$

$$(1-r)^2 + 1 + (1+r)^2 = 21 \Rightarrow 0$$

$$r^2 - 2r + 1 + 1 + r^2 + 2r + 1 = 21 \Rightarrow 0$$

$$2r^2 - 18 = 0$$

$$r = \pm 3$$

$$1 + (-3) = -2$$

- 11)
- (a_n)
- bir aritmetik dizi olsun.
- $a_8 = 12$
- ve
- $a_{15} = 54$
- ise bu dizinin ilk
- n
- terimi toplamı kaçtır?

$$215 = 28 + 7r$$

$$54 = 12 + 7r \quad r = 6$$

$$S_n = \frac{n}{2} (2a_1 + 2n)$$

$$\frac{n}{2} [2a_1 + (n-1) \cdot r]$$

$$\frac{n}{2} [-60 + 6n - 6]$$

$$a_8 = a_1 + 7r$$

$$12 = a_1 + 42$$

$$a_1 = -30$$

$$\frac{(6n-66)n}{2} = 3n(n-11)$$

- 12)
- $\sum_{k=0}^{90} \cos^2 k$
- işleminin sonucu kaçtır?

$$\cos^2 0 + \cos^2 1 + \dots + \cos^2 89 + \cos^2 90 \\ \cos^2 0 \quad \cos^2 1 + \dots + \sin^2 1 + \sin^2 0$$

$$1$$

$$46 \cdot 1 = 46$$

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

- 13)
- $\sum_{k=0}^{20} \frac{k}{(k+1)!}$
- işleminin sonucu kaçtır?

$$\frac{k+1-1}{(k+1)!} = \frac{k+1}{(k+1)!} - \frac{1}{(k+1)!} = \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}$$

$$\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!}$$

$$\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!}$$

$$\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} = 1 - \frac{1}{21!}$$

$$\dots$$

$$\frac{1}{20!} - \frac{1}{21!}$$

- 14)
- $\sum_{k=0}^{63} \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}}$
- işleminin sonucu kaçtır?

$$\frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}} = \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{k+1-k} = \sqrt{k+1} - \sqrt{k}$$

$$\sqrt{1} - \sqrt{0}$$

$$\sqrt{2} - \sqrt{1} = 8 - 0 = 8$$

$$\dots$$

$$\sqrt{64} - \sqrt{63}$$