

DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER – 8

KÖKLÜ İFADELER

KÖKLÜ SAYILAR

n birden büyük bir doğal sayı ve a bir reel sayı olmak üzere $a^n = b$ ifadesinde a ya b nin n . kuvvetten kökü denir. Yani

$$a^n = b \Rightarrow a = \sqrt[n]{b} \text{ veya özel olarak}$$

$$a^2 = b \Rightarrow a = \sqrt{b} \text{ a, b nin kareköküne eşittir. (2.kuvvetten kökü)}$$

$$a^3 = b \Rightarrow \sqrt[3]{b} \text{ a, b nin küp köküne eşittir. (3.kuvvetten kökü)}$$

$$a^4 = b \Rightarrow \sqrt[4]{b} \text{ a ya, b nin 4.kuvvetten kökü denir.}$$

UYARI:

Her köklü ifade reel sayı belirtmez; kök derecesi çiftken kök içi negatif olursa ifade reel sayı değildir. Yani

$$\sqrt[4]{-3} \notin \mathbb{R} \quad \text{ama} \quad \sqrt[13]{-3} \in \mathbb{R}$$

Örnek...1 :

$\sqrt[4]{x-3}$ ifadesinin reel sayı belirtmesi için x kaç olmalıdır?

Örnek...2 :

$\sqrt[12]{8-x} + \sqrt[4]{x-2} - \sqrt[17]{x-5}$ ifadesinin reel sayı belirtmesi için x kaç olmalıdır?

Örnek...3 :

$\sqrt[102]{12-|8-2x|}$ ifadesinin reel sayı belirtmesi için x hangi aralıkta olmalıdır?

KÖKLÜ İŞLEMLERİN ÖZELLİKLERİ ÖZELLİK 1

$$\sqrt[2n]{a^{2n}} = |a|, n \in \mathbb{Z}^+ \quad \sqrt[2n+1]{a^{2n+1}} = a, n \in \mathbb{Z}^+$$

Örnek...4 :

$$\sqrt[5]{(-2)^5} + \sqrt[4]{(-2)^4} - \sqrt[3]{(-27)^3} = ?$$

Örnek...5 :

$$\sqrt{25} + \sqrt{49} + \sqrt{121} - \sqrt{(-8)^2} = ?$$

Örnek...6 :

$$\sqrt[3]{(\sqrt{2}-1)^3} + \sqrt{(1-\sqrt{2})^2} = ?$$

Örnek...7 :

$$\sqrt{\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{3}\right)} = ?$$

Örnek...8 :

$$\sqrt[4]{(\sqrt{2}-5)^4} - \sqrt[6]{(5-\sqrt{2})^6} = ?$$

Örnek...9 :

$x > y > 0 > z$ ise

$$\sqrt[40]{(z-x)^{40}} - \sqrt[5]{(z-y)^5} + 2z - y$$

ifadesinin eşitini bulunuz?

Örnek...10 :

$$\sqrt{967.969+1} = ?$$

DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER – 8

KÖKLÜ İFADELER

ÖZELLİK 2

m , 1 den büyük bir tamsayı ve $a \geq 0$ ise
$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

Örnek...11 :

Rasyonel kuvvet olarak yazınız.

$$\sqrt{5}$$

$$\sqrt[3]{8}$$

$$\sqrt[3]{6}$$

Örnek...12 :

$\sqrt[4]{2^5 \cdot 8^4 \cdot 16^3} = 64$ eşitliğine göre, x kaçtır?

Örnek...13 :

$\sqrt[3]{(2)^{x+2}} = \sqrt[5]{(4)^{7-2x}}$ ise x kaçtır?

ÖZELLİK 3

$a > 0$ ve $k > 0$ olmak üzere,
$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \cdot k]{a^{m \cdot k}} = \sqrt[k]{a^{\frac{m}{n}}}$$

Yani kök dereceleri uygun koşullarda sadeleştirilebilir ve ya genişletilebilir

Örnek...14 :

$x = \sqrt{5}, y = \sqrt[3]{120}$ sayılarını sıralayınız

ÖZELLİK 4

$$x \cdot \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{a \cdot x^n}$$

Örnek...15 :

$a = 3\sqrt{5}, b = 5\sqrt{2}$ sayılarını sıralayınız.

ÖZELLİK 5 (TOPLAMA VE ÇIKARMA)

$$x \cdot \sqrt[n]{a} + y \cdot \sqrt[n]{a} - z \cdot \sqrt[n]{a} = (x + y - z) \sqrt[n]{a}$$

Örnek...16 :

$$3\sqrt{2} + 5\sqrt{128} - 2\sqrt{32} = ?$$

Örnek...17 :

$$\sqrt{28} - 3\sqrt{63} - 6\sqrt{112} = ?$$

Örnek...18 :

$$3\sqrt{80} - 6\sqrt{20} + 2\sqrt{45} = ?$$

ÖZELLİK 6 (ÇARPMA)

$$(m \cdot \sqrt[n]{a}) \cdot (p \cdot \sqrt[n]{b}) \cdot \sqrt[n]{c} = m \cdot p \cdot \sqrt[n]{abc}$$

Örnek...19 :

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{6} = ?$$

DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER – 8

KÖKLÜ İFADELER

Örnek...20 :

$$3\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{6} = ?$$

Örnek...21 :

$$(\sqrt{6}-1) \cdot (\sqrt{6}+1) = ?$$

Örnek...22 :

$$(\sqrt{6}-2)^2 = ?$$

ÖZELLİK 7 (BÖLME)

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

Örnek...23 :

$$\frac{\sqrt{32}}{\sqrt{2}} = ?$$

Örnek...24 :

$$\frac{\sqrt{0,63}}{\sqrt{0,07}} = ?$$

Örnek...25 :

$$\frac{\sqrt[4]{128}}{\sqrt[4]{2}} = ?$$

Örnek...26 :

$$\sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[3]{\frac{4}{2}} = ?$$

Örnek...27 :

$$\frac{(\sqrt{4,4} + \sqrt{9,9})}{\sqrt{0,1}} = ?$$

Örnek...28 :

$$\frac{(\sqrt{1,47} + \sqrt{0,75})}{\sqrt{75}} = ?$$

Örnek...29 :

$$\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{10} + \sqrt{15}}{\sqrt{8} + \sqrt{12}} = ?$$

Örnek...30 :

$$a = \sqrt{3}-1, b = \sqrt{3}+1 \text{ ise } \frac{a}{b} + \frac{b}{a} = ?$$

ÖZELLİK 8 (İÇ İÇE KÖK DURUMU)

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[m \cdot n]{x}$$

$$\sqrt[m]{x \cdot \sqrt[n]{a}} = \sqrt[m]{a \cdot x^n}$$

Örnek...31 :

$$\sqrt[5]{1024} = ?$$

Örnek...32 :

$$\sqrt[3]{\sqrt[4]{8}} = \sqrt{x} \text{ ise } x+y \text{ (} x, y \in \mathbb{Z} \text{)} = ?$$

DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER – 8

KÖKLÜ İFADELER

Örnek...33 :

$$\sqrt[3]{4\sqrt[3]{32}}=?$$

Örnek...34 :

$$\sqrt[3]{4\sqrt{x}}=\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[3]{2} \text{ ise } x \text{ kaçtır?}$$

Örnek...35 :

$$0 < x < 2 \text{ olduğuna göre } \sqrt{x^2+x+3}-\sqrt{x^2-4x+4}$$

ifadesinin eşiti nedir?

ÖZELLİK 9

$$\begin{array}{c} \sqrt{a \pm 2\sqrt{b}} \sqrt{x \pm \sqrt{y}} \\ \downarrow \quad \downarrow \\ x+y \quad x \cdot y \end{array} \quad (x > y)$$

Örnek...36 :

$$\sqrt{8+2\sqrt{7}}-\sqrt{8-2\sqrt{7}}=?$$

Örnek...37 :

$$\sqrt{12+4\sqrt{5}}=?$$

Örnek...38 :

$$\sqrt{2+\sqrt{3}}=?$$

Örnek...39 :

$$\sqrt{5+\sqrt{21}}-\sqrt{5-\sqrt{21}}=?$$

Örnek...40 :

$$\sqrt[4]{17+12\sqrt{2}}=?$$

ÖZELLİK 10 (PAYDANIN RASYONEL YAPILMASI)

$$\text{i) } \frac{K}{\sqrt{a}} = \frac{K}{\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}}} = \frac{K(\sqrt{a})}{a}$$

Örnek...41 :

$$\frac{8}{\sqrt{2}}=?$$

Örnek...42 :

$$\frac{12}{\sqrt{3}} + \frac{21}{5\sqrt{3}}$$

$$\text{ii) } \frac{K}{\sqrt{a+\sqrt{b}}} = \frac{K}{\frac{\sqrt{a+\sqrt{b}}}{\sqrt{a-\sqrt{b}}}} = \frac{K(\sqrt{a-\sqrt{b}})}{a-b}$$

Örnek...43 :

$$\frac{24}{\sqrt{5-\sqrt{3}}}=?$$

Örnek...44 :

$$\frac{24}{\sqrt{3}} - \frac{12}{\sqrt{3}-1}=?$$

Örnek...45 :

$$\frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{3}}} - \frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}=?$$

Örnek...46 :

$a=\sqrt{71}-\sqrt{70}$, $b=\sqrt{67}-\sqrt{66}$
sayılarını sıralayınız.

DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER – 8

KÖKLÜ İFADELER

DEĞERLENDİRME

1) $\sqrt[12]{14-2x} + \sqrt[4]{x-7} - 3x + 5$ reel sayısının değeri kaçtır?

2) $x < 0 < y < z$ veriliyor.
 $\sqrt[3]{(x-y-z)^3} + \sqrt[4]{(x-y-z)^4} + \sqrt{(x-y)^2}$ ifadesinin eşitini bulunuz?

3) $\sqrt{169} - \sqrt[8]{(-2)^8} + \sqrt[3]{-64} = ?$

4) $\sqrt[3]{(2)^{x+2}} = \sqrt[5]{(4)^{7-2x}}$ ise x kaçtır?

5) $\sqrt{28} - 3\sqrt{63} - 6\sqrt{112} = ?$

6) $(\sqrt{6}-2)^2 + \frac{\sqrt[4]{128}}{\sqrt[4]{2}} = ?$

7) $\sqrt[4]{17+4\sqrt{18}} = ?$

8) $\frac{20}{\sqrt{5}} - \frac{12}{\sqrt{5}-1} = ?$

9) a_1, a_2, \dots, a_n gibi n tane sayının aritmetik ortalaması $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$ geometrik ortalaması $G = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}$ olarak tanımlanmıştır.

a) Buna göre 1, 2 ve 4 sayılarının aritmetik ortalaması geometrik ortalamasının kaç katıdır?

b) x ve y negatif olmayan iki sayı olsun. x ve y'nin aritmetik ortalaması A.O. ve geometrik ortalaması G.O ise $G.O \leq A.O$ olduğunu ispatlayınız