

## LOGARİTMA – 1

### ( ÜSTEL FONKSİYON – LOGARİTMA FONKSİYONU )

#### LOGARİTMA

$a^b=c$  eşitliğini düşünelim.

Mümkün olan durumlarda;

**Durum 1:** a ve b biliniyorsa c üs alma işlemiyle bulunabilir. Örneğin  $2^5=c$  ise  $c=32$  dir.

**Durum 2:** b ve c biliniyorsa a kök alma işlemiyle bulunabilir. Örneğin  $a^2=7$  ise  $a=\sqrt{7}$  dir.

Bu işlemleri daha önceden görmüştük.

**Durum 3:** a ve c biliniyorsa b logaritma alma işlemiyle bulunabilir.  $2^b=7$  eşitliğinin çözümü logaritmayla  $b=\log_2 7$  olarak elde edilir. (Bazı özel durumlarda logaritma işlemi yapmaya gerek kalmadan da çözüm bulunabilir. Örneğin  $2^b=8$  gibi. )

#### SONUÇ

Logaritma daha önceden çözemediğimiz  $a^x=b$  gibi denklemleri çözmenin aracıdır. Logaritma alma işlemi kabaca üs alma işleminin tersi olarak düşünülebilir. Logaritma alma işlemine başlamadan önce üstel fonksiyonları inceleyelim.

#### ÜSTEL FONKSİYON

$a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$  olmak üzere,  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x)=a^x$  fonksiyonuna üstel fonksiyon denir.

#### Örnek...1 :

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ ,  $f(x)=2^x$  üstel fonksiyonu için  $f(5)$  kaçtır?

32

#### Örnek...2 :

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ ,  $f(x)=a^x$  üstel fonksiyonu için  $f(5)=243$  tür. Buna göre, a kaçtır?

3

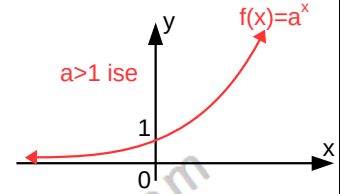
#### Örnek...3 :

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x)=2^x$  fonksiyonuna ait tabloyu doldurup oluşan ikililere göre grafiğini çiziniz?

x	-2	-1	0	1	2	3	4
y							

#### GENELLEME

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x)=a^x$  fonksiyonu  $a > 1$  için artandır. Şekli inceleyiniz.



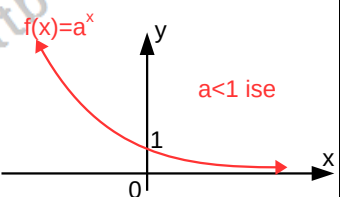
#### Örnek...4 :

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x)=(\frac{1}{2})^x$  fonksiyonuna ait tabloyu doldurup oluşan ikililere göre grafiğini çiziniz?

x	-2	-1	0	1	2	3	4
y							

#### GENELLEME

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ ,  $f(x)=a^x$  fonksiyonu  $0 < a < 1$  için azalandır. Şekli inceleyiniz.



## LOGARİTMA – 1

### ( ÜSTEL FONKSİYON – LOGARİTMA FONKSİYONU )

#### ÖZET OLARAK

$a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$   $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = a^x$  üstel fonksiyonu;

1)  $a > 1$  için artandır.

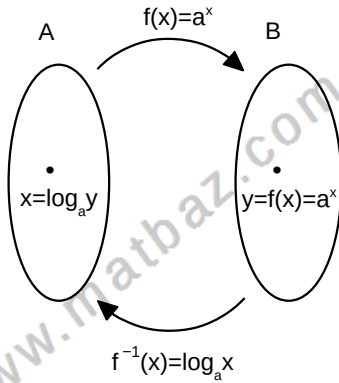
2)  $0 < a < 1$  için azalandır.

3) Bire bir fonksiyondur.

4) Değer kümesi  $\mathbb{R}^+$  alınırsa örtendir. Bundan dolayı  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ ,  $f(x) = a^x$  için  $f^{-1}(x)$  ters fonksiyonu tanımlıdır ve bu ters fonksiyona logaritma fonksiyonu denir.

#### LOGARİTMA FONKSİYONU

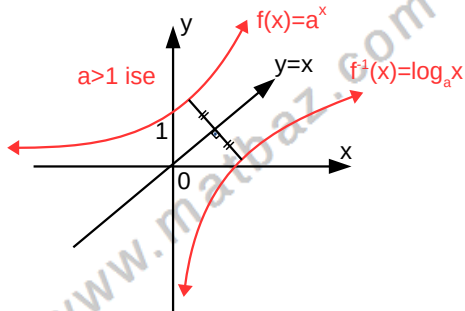
$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ ,  $f(x) = a^x$  fonksiyonunun ters fonksiyona sahip olduğunu biliyoruz. Söz konusu ters fonksiyona **logaritma** fonksiyonu denir ve  $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \log_a x$  ile gösterilir. Şekli inceleyiniz.



yukarıdaki eşlemeyi sembolik olarak  $y = a^x \Leftrightarrow x = \log_a y$  olarak yazabiliriz.

Örneğin uygun şartlarda tanımlı  $f(x) = 2^x$  ve  $g(x) = \log_2 x$  fonksiyonları birbirlerinin tersleridir.

$f(x) = a^x$  ile  $g(x) = \log_a x$  fonksiyonları birbirlerinin ters fonksiyonlarıdır. Bu fonksiyonların grafikleri  $y = x$  doğrusuna göre simetriklerdir. Şekli inceleyiniz.



#### UYARI 1

1)  $\log_a x$  ifadesi " a tabanında x in logaritması" diye okunur.

2)  $\log_a x$  yazılışı a'nın hangi kuvveti x olur şeklinde yorumlanabilir.

Örneğin  $\log_2 8$  ifadesinin eşitini bulmak için ya 2 sayısının hangi kuvveti 8 yapar diye düşünürüz ya da  $\log_2 8 = x$  olsun diyerek logaritma ve üstel ifadeyi birbirine bağlayan  $\log_a y = x \Leftrightarrow a^x = y$  eşitliğinden yola çıkar  $2^x = 8$  denklemini mümkünse çözer ve x'i buluruz. (Daha sonra logaritma özelliklerini öğrendiğimizde farklı bir düşünüşle de sonuca gidebiliriz.)

#### Örnek...5 :

$\log_2 x = 4$  olduğuna göre, x kaçtır?

16

#### Örnek...6 :

$\log_5 3025$  kaçtır?

5

#### Örnek...7 :

$\log_k 9 = 2$  olduğuna göre, k kaçtır?

3

#### Örnek...8 :

$\log_2 (x+5) = 7$  olduğuna göre, x kaçtır?

123

#### Örnek...9 :

$\log_4 (16) = x$  olduğuna göre, x kaçtır?

2

#### Örnek...10 :

$\log_{\sqrt{2}} (8) = x$  olduğuna göre, x kaçtır?

6

## LOGARİTMA – 1

( ÜSTEL FONKSİYON – LOGARİTMA FONKSİYONU )

### Örnek...11 :

$\log_{\frac{1}{25}}(125)=x$  olduğuna göre, x kaçtır?

$$\frac{-3}{2}$$

### Örnek...12 :

$\log_3 81=2x-3$  olduğuna göre, x kaçtır?

$$\frac{7}{2}$$

### Örnek...13 :

$\log_3 1=\frac{2}{x}-3$  olduğuna göre, x kaçtır?

$$\frac{2}{3}$$

### Örnek...14 :

$\log_5 \frac{x-1}{x-2}=-1$  olduğuna göre, x kaçtır?

$$\frac{3}{4}$$

### Örnek...15 :

$\log_2 [3+2\log_3(x+1)]=1$  olduğuna göre, x kaçtır?

$$\frac{\sqrt{3}-3}{3}$$

### Örnek...16 :

$4^{\frac{x}{3}-2}=128$  olduğuna göre, x kaçtır?

$$\frac{33}{2}$$

### Örnek...17 :

$5^x=8$  olduğuna göre, x kaçtır?

$$\log_5 8$$

### Örnek...18 :

$7^{x+2}=15$  olduğuna göre, x kaçtır?

$$\log_7(15)-2$$

### Örnek...19 :

$6^{2x+5}-2=17$  olduğuna göre, x kaçtır?

$$\frac{\log_6(19)-5}{2}$$

### Örnek...20 :

Uygun şartlarda  $f(x)=5^{x+1}-2$  fonksiyonunun ters fonksiyonunu bulunuz?

$$f^{-1}(x)=\log_5(x+2)-1$$

### Örnek...21 :

Uygun şartlarda  $f(x)=3^{x-2}+4$  fonksiyonunun ters fonksiyonunu bulunuz?

$$f^{-1}(x)=\log_3(x-4)+2$$

## LOGARİTMA – 1

### ( ÜSTEL FONKSİYON – LOGARİTMA FONKSİYONU )

#### Örnek...22 :

Uygun şartlarda  $f(x)=7^{2x-3}+5$  fonksiyonu veriliyor.  $f^{-1}(12)=?$

2

#### Örnek...23 :

$f:(3,\infty)\rightarrow\mathbb{R}$  ,  $f(x)=\log_2(x-3)$   
fonksiyonunun ters fonksiyonunu bulunuz?  
 $f^{-1}(x)=2^x+3$

#### Örnek...24 :

$f:(-5,\infty)\rightarrow\mathbb{R}$  ,  $f(x)=\log_2(x+5)-2$   
fonksiyonunun ters fonksiyonunu bulunuz?  
 $f^{-1}(x)=2^{x+2}-5$

#### Örnek...25 :

$f:(-3,\infty)\rightarrow\mathbb{R}$  ,  $f(x)=\log_2(2x+6)-2$   
fonksiyonu için  $f^{-1}(4)=?$

29

#### UYARI 2

Tabanı 10 olan logaritma fonksiyonuna onluk (bayağı) logaritma fonksiyonu denir.

$f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}^+$  ,  $f(x)=\log_{10}x$  fonksiyonu  $f(x)=\log x$  ile de gösterilebilir. (Yani taban belirtilmemişse 10 alınır)

#### Örnek...26 :

$\log 100=x$  ise  $x$  kaçtır?

2

#### Örnek...27 :

$\log(0,001)=2x+7$  ise  $x$  kaçtır?

-5

Tabloyu inceleyiniz.

x	$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$	x	$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$
1	2	-2	4
10	2,5937..	-10	2,8679.
$10^2$	2,7048..	$-10^2$	2,7319..
$10^6$	2,7182..	$-10^6$	2,7182..

Tabanı e (Euler sayısı) değeri 2,7182.. olan irrasyonel sayı olan logaritma fonksiyonuna doğal logaritma fonksiyonu denir ve  $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}^+$  ,  $f(x)=\log_e x=\ln x$  ile gösterilir.

#### Örnek...28 :

$\ln(\log x)=0$  ise  $x$  kaçtır?

10

#### Örnek...29 :

$f:(-\infty,\frac{4}{3})\rightarrow\mathbb{R}$  ,  $f(x)=\ln(4-3x)-2$   
fonksiyonunun ters fonksiyonunu bulunuz?

$$f^{-1}(x)=\frac{4-e^{x+2}}{3}$$

## LOGARİTMA – 1

### ( ÜSTEL FONKSİYON – LOGARİTMA FONKSİYONU )

#### LOGARİTMA FONKSİYONUNUN EN GENİŞ TANIM KÜMESİ

Bir fonksiyon için en geniş tanım kümesi, fonksiyonun bağımsız değişkeninin (genelde x) seçilebileceği en büyük kümedir.

$f(x)=\log_{h(x)}g(x)$  fonksiyonun en geniş tanım kümesi

i)  $g(x)>0$  ii)  $h(x)>0$  iii)  $h(x)\neq 1$

ifadelerini sağlayan x değerlerinin kümesidir.

Özetlersek, taban ve logaritması alınan sayı pozitif olmalı, taban pozitifken 1 olmamalıdır.

#### Örnek...30 :

$f(x)=\log_2(x-2)$  fonksiyonunun en geniş tanım kümesini bulunuz?

(2, ∞)

#### Örnek...31 :

$f(x)=\log_{x-5}(x+5)$  fonksiyonunun en geniş tanım kümesini bulunuz?

(-5,8) - {7}

#### Örnek...32 :

$f(x)=\log_x(x^2-8x+15)$  fonksiyonunun en geniş tanım kümesini bulunuz?

$\mathbb{R}-([3,5]\cup\{-1,0,1\})$

#### Örnek...33 :

$f(x)=\ln\left(\frac{x-2}{x^2-64}\right)$  fonksiyonunun en geniş tanım

kümesinde kaç tane negatif tam sayı vardır?

7 tane

{-7,-6,-5,...,-1}

#### Örnek...34 :

$f(x)=\log_{\sqrt{2}}(x^2-2x+m)$  fonksiyonunun en geniş tanım kümesi reel sayılar kümesi ise m nin en küçük tam sayı değeri kaçtır?

2

#### Örnek...35 :

$f(x)=\log_x(x^2+5x+m)$  fonksiyonunun en geniş tanım kümesi  $\mathbb{R}-\{k\}$  kümesi ise m-k kaçtır?

$\frac{35}{4}$

## LOGARİTMA – 1

### ( ÜSTEL FONKSİYON – LOGARİTMA FONKSİYONU )

#### DEĞERLENDİRME

- 1)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ ,  $f(x) = (a+2)^x$  üstel fonksiyonu için  $f(3) = 1331$  dir. Buna göre, a kaçtır?

9

- 2)  $\log_{\sqrt{5}}(125) = x$  ve  $\log_2(x-2) = a$  ise x, a nın kaç katıdır?

3

- 3)  $\log[8 + \log_2[3 + 2\log_3(x-1)]] = 1$  olduğuna göre, x kaçtır?

$\sqrt{3} + 1$

- 4)  $7^{x+5} - 2 = 13$  olduğuna göre, x kaçtır?

$\log_7(15) - 5$

- 5)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ ,  $f(x) = 5^{3x+2} - 7$  fonksiyonunun ters fonksiyonunu bulunuz?

$$f^{-1}(x) = \frac{\log_5(x+7) - 2}{3}$$

- 6)  $f: (-\frac{2}{5}, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \log_2(5x+2) + 7$  fonksiyonunun ters fonksiyonunu bulunuz?

$$f^{-1}(x) = \frac{2^{x-7} - 2}{5}$$

- 7)  $f(x) = \log_{x^2-x+1}(x^2+6x+5)$  fonksiyonunun en geniş tanım kümesini bulunuz?

$$(-\infty, -5) \cup (-1, \infty) - \{0, 1\}$$

- 8)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ ,  $f(x) = 4e^{x-2} + 3$  fonksiyonunun ters fonksiyonunu bulunuz?

$$f^{-1}(x) = 2 + \ln\left(\frac{x-3}{4}\right)$$