

ANALİTİK GEOMETRİ

ÇEMBERİN ANALİTİĞİ

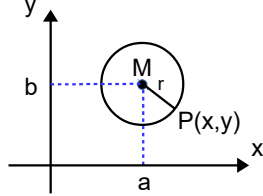
TANIM

Bir noktadan eşit uzaklıktaki noktaların geometrik yeri **düzlemde çember** belirtir.

ÇEMBERİN STANDART VE VEKTÖREL DENKLEMİ

$M(a,b)$ ve $P(x,y)$ noktaları arasındaki uzaklık kullanarak çemberin standart denklemi $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ olarak elde edilir.

$\|\vec{MP}\| = r$ ise M merkezli ve r yarıçaplı çemberin vektörel denklemidir.



Örnek...1 :

$M(3,5)$ ve yarıçapı 4 birim olan çemberin standart denklemini yazınız.

Örnek...2 :

$(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 20$ çemberinin merkez ve yarıçapını bulunuz.

MERKEZİL ÇEMBER :

Merkezi orijinde olan çemberlere denir. Yani $M(0,0)$ ve yarıçapı r ise çemberin denklemi $x^2 + y^2 = r^2$ biçimindedir.

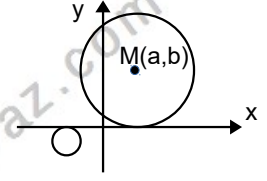
Örnek...3 :

$(2x - 1)^2 + (2y + 3)^2 = 40$ çemberinin merkez ve yarıçapını bulunuz.

EKSENLERE TEĞET ÇEMBERLER :

x eksenine teğet çemberler :

$|b| = r$ dir.



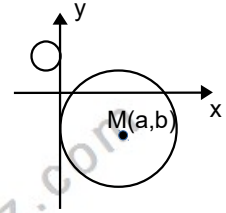
Örnek...4 :

$M(4,-6)$ merkezli ve x eksenine teğet çemberin denklemini yazınız

Y EKSENİNE TEĞET ÇEMBERLER :

y eksenine teğet çemberler :

$|a| = r$ dir.



Örnek...5 :

$M(4,-6)$ merkezli ve y eksenine teğet çemberin denklemini yazınız?

UYARI

Bir çember her iki eksene teğet ise merkezi 1. veya 2. açıortay doğrusu üzerindedir. (Bu önermenin karşıtı doğru değildir.)

Her iki eksene teğet çemberde $M(a,b)$ merkez ise $|b| = |a| = r$ dir.

Örnek...6 :

$(x + 5)^2 + (y - p)^2 = r$ çemberi her iki eksene de teğetse p,r en az kaçtır?

ANALİTİK GEOMETRİ

ÇEMBERİN ANALİTİĞİ

Örnek...7 :

Merkezi $3y+x=4$ doğrusu üzerinde bulunan ve her iki eksene teğet olan çemberlerin merkezlerini ve yarıçaplarını bulunuz? Bu çemberler arasındaki en kısa uzaklık kaç birimdir?

Örnek...8 :

$A(-2,3)$ noktasından geçen ve iki eksene de teğet olan çemberin yarıçapı kaç olabilir?

Örnek...9 :

$3x-4y=0$ ile $4y-3x+15=0$ doğrularına teğet çemberin ve merkezi $y=3$ doğrusu üzerinde olan çemberin denklemi nedir?

ÇEMBERİN GENEL DENKLEMİ

$M(a, b)$ merkezli ve r yarıçaplı çemberin denklemi $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ idi.

Bu denklemi açıp düzenlersek

$$x^2 + y^2 - 2.a.x - 2.b.y + a^2 + b^2 - r^2 = 0 \text{ olur.}$$

$$-2.a=A \quad -2.b=B \quad \text{ve} \quad a^2 + b^2 - r^2 = C \text{ diyelim.}$$

$$x^2 + y^2 + A.x + B.y + C = 0$$

Buradan şu eşitlikleri elde ederiz :

$$M(a, b) = M\left(\frac{-A}{2}, \frac{-B}{2}\right)$$

$$r = \frac{1}{2} \sqrt{A^2 + B^2 - 4.C} \quad \Delta = A^2 + B^2 - 4.C \quad (\text{Delta})$$

Uyarı: Çember denkleminde yukarıdaki bağıntıların kullanılabilmesi için

1. x^2 ve y^2 li terimlerin katsayısı 1 olmalı
2. denkleminde $x.y$ li terim bulunmamalı
3. $\Delta = A^2 + B^2 - 4C > 0$ olmalıdır.

$\Delta = A^2 + B^2 - 4C > 0$ ise bir çember belirtir.

$\Delta = A^2 + B^2 - 4C = 0$ ise bir nokta belirtir.

$\Delta = A^2 + B^2 - 4C < 0$ ise çember belirtmez.

Bunu sanal çember belirtir şeklinde de söyleriz.

Örnek...10 :

$x^2 + y^2 - 6x + 2y - 5 = 0$ çemberinin merkezini ve yarıçapını bulunuz.

Örnek...11 :

$3x^2 + 3y^2 + 12x - 8y - 5 = 0$ çemberinin merkezini bulunuz.

ANALİTİK GEOMETRİ

ÇEMBERİN ANALİTİĞİ

Örnek...12 :

$(2m-1)x^2 + (m+1)y^2 - (n-6)x.y + 6nx - n - 9 = 0$ denklemi bir çember belirtiyor ise bu çemberin merkezini ve yarıçapını bulunuz.

Örnek...13 :

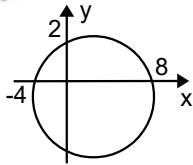
$(m-2)x^2 + (4-m)y^2 + (n-5)xy + 2mx - ny - mn = 0$ denklemi bir çember belirttiğine göre merkezini ve yarıçapını bulunuz.

Örnek...14 :

$x^2 + y^2 - 8x + 9y - 20 = 0$ çemberinin x-ekseninden ayırdığı kirişin uzunluğu kaç birimdir?

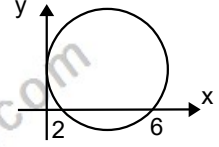
Örnek...15 :

Şekilde verilen çemberin denklemini yazınız.



Örnek...16 :

Şekilde verilen y-eksenine teğet çemberin denklemini yazınız.

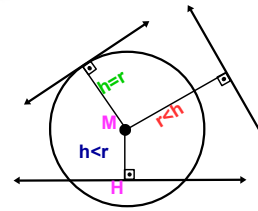


Örnek...17 :

A(0,5) B(-12,0) ve K(0,0) noktalarından geçen çemberin denklemini yazınız.

www.matbaz.com

ÇEMBER İLE DOĞRUNUN DURUMLARI :



Çember ve doğrunun kesişip kesişmediğine karar verilirken merkezin doğruya uzaklığı ile yarıçap karşılaştırılır:

- Durum 1) $|MH| > r$ doğru çemberi kesmez
- Durum 2) $|MH| = r$ doğru çember teğettir
- Durum 3) $|MH| < r$ doğru çember iki noktada kesişir.

NOT

Çember ve doğrunun kesim noktalarını bulmak için ortak çözüm yaparız.

ANALİTİK GEOMETRİ

ÇEMBERİN ANALİTİĞİ

Örnek...18 :

Analitik düzlemde $(x+3)^2+y^2=5$ çemberi ile $y-2x=p$ doğrusu teğet ise p nin alabileceği değerler toplamı kaçtır?

Örnek...19 :

Analitik düzlemde $x^2+y^2=r^2$ çemberi ile $3x-4y=10$ doğrusu teğet ise r kaçtır?

Örnek...20 :

$(x-3)^2+(y+1)^2=16$ çemberi ile $4x-3y+k=0$ doğrusunun iki noktada kesişmesi için k ne olmalıdır?

Örnek...21 :

$(x+1)^2+(y-1)^2=18$ çemberi ile $y=x-m$ doğrusunun kesişmemesi için m ne olmalıdır?

Örnek...22 :

$x^2-2x+y^2-6y-8=0$ çemberinin x ekseninde ayırdığı kirişin uzunluğu kaç birimdir?

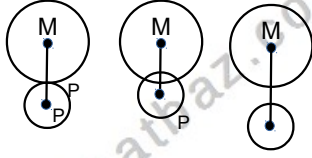
Örnek...23 :

$x^2-2x+y^2-4y-11=0$ çemberinin $y=x+1$ doğrusuyla kesim noktaları A ve B olsun. $|AB|$ kaç birimdir?

Örnek...24 :

Analitik düzlemde $x^2+y^2=6$ merkezli çemberi ile $y=3x-1$ doğrusunun kesim noktalarının apsisi toplamı kaçtır?

İKİ ÇEMBERİN DURUMLARI



İki çemberin kesişip kesişmediğine karar verilirken merkezler arası doğru ile yarıçap toplamı veya farkı karşılaştırılır.

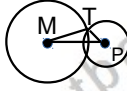
durum 1 $|MP|=r_m+r_p$ çemberler dıştan teğet

durum 2 $|MP|=|r_m-r_p|$ çemberler içten teğet

durum 3 $|r_m-r_p|<|MP|<r_m+r_p$ çemberler iki noktada kesişir

durum 3 $|MP|<|r_m-r_p|$ veya $|MP|>r_m+r_p$ çemberler kesişmezler

Dik kesişen çemberler



Kesim noktalarındaki teğetleri dik olan çemberlere dik kesişiyorlar denir.

Yukarıdaki şekilde merkezler $m(\widehat{MTP})=90^\circ$ ise çemberler dik kesişmiştir.

Örnek...25 :

$$(x+5)^2 + (y-3)^2 = 225 \text{ ve}$$

$$(x-7)^2 + (y-k)^2 = 4$$

çemberleri içten teğet ise k kaç olabilir?

Örnek...26 :

$$(x-3)^2 + (y+1)^2 = 16 \text{ ve}$$

$$(x+1)^2 + (y-k)^2 = 49$$

çemberleri dıştan teğet ise k değerleri çarpımı kaç olabilir?

Örnek...27 :

$$(x-3)^2 + y^2 = 16 \text{ ve}$$

$$(x+1)^2 + (y-m)^2 = 9$$

çemberleri dik kesiştiğine göre m değerleri toplamı kaç olabilir?

ÇEMBER İLE NOKTANIN DURUMLARI

O(a,b) merkezli ve r yarıçaplı $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ çemberi ile çember ile aynı düzlemde bulunan $P(x_0, y_0)$ noktası için $|OP|^2 - r^2$ değerine P noktasının bu çembere göre kuvveti denir.

$|OP|^2 - r^2 = (x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 - r^2$ olacağından bu hesaplama çember denklemi $F(x,y)=0$ biçimine getirildikten sonra P noktasının koordinatları $F(x,y)$ kısmında yazılarak hesaplanmalıdır.

Durum 1 $F(x_0, y_0)=0$ P noktası çemberin üzerindedir

Durum 2 $F(x_0, y_0)>0$ P noktası çemberin dışındadır

Durum 3 $F(x_0, y_0)<0$ P noktası çemberin içindedir

Not 1: $F(x_0, y_0)>0$ ise bu hesaplama sonucu bulunan pozitif sayı çembere P noktasından çizilen teğet uzunluğunun karesidir.

Not 2: Negatif kuvvetin mutlak değeri ise bu noktada ile iki parçaya ayrılan giriş parçalarının sabit olan çarpım değeridir.

ANALİTİK GEOMETRİ

ÇEMBERİN ANALİTİĞİ

Örnek...28 :

P(6, 4) noktasından $x^2 + y^2 - 4x - 5y + 20 = 0$ çemberine göre kuvvetini bulup kuvveti yorumlayınız.

Örnek...29 :

P(2, -3) noktasından $x^2 + y^2 - 3x - 5y + k = 0$ çemberine çizilen teğetin değme noktası T ve IPTI = 7 ise k = ?

Örnek...30 :

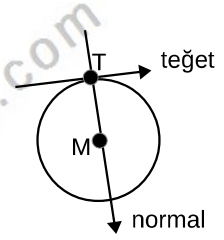
A(-1, 2) noktasından geçen bir doğru $(x + 4)^2 + (y - 5)^2 = 12$ çemberini K ve L noktalarında kesiyor. |AK|. |AL| çarpımı kaçtır?

Örnek...31 :

$(x - 5)^2 + (y + 2)^2 = 41$ çemberinin (1,2) noktasından geçen en kısa kirişinin uzunluğu kaç birimdir?

TEĞET VE NORMAL DENKLEMLERİ :

$x^2 + y^2 = r^2$ çemberine üzerindeki $T(x_0, y_0)$ noktasından çizilen teğetin denklemi $x \cdot x_0 + y \cdot y_0 = r^2$ dir.



$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ çemberine üzerindeki $T(x_0, y_0)$ noktasından çizilen teğetin denklemi $(x_0 - a) \cdot (x - a) + (y_0 - b) \cdot (y - b) = r^2$ dir.

Bu bağıntıları kullanmak yerine iki noktası bilinen doğru denklemi, diklik koşulu ve standart doğru denklemi kullanarak teğet ve normal denklemlerini bulabiliriz

Örnek...32 :

$(x + 3)^2 + y^2 = 34$ çemberine (2,-3) noktasından çizilen teğetin denklemi nedir?

Örnek...33 :

$x^2 + y^2 + 4x - 2y = 4$ çemberinin A(1,1) noktasından çizilen teğetin ve normalin denklemi nedir?

ANALİTİK GEOMETRİ

ÇEMBERİN ANALİTİĞİ

Örnek...34 :

$(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 25$ çemberinin $A(-2, -4)$ noktasından geçen teğetin denklemini bulunuz?

DEĞERLENDİRME

1) $(3x - 8)^2 + (3y + 1)^2 = 36$ çemberinin merkez ve yarıçapını bulunuz.

2) $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 36$ çemberi üzerindeki bir noktanın $A(-4, 5)$ noktasına uzaklığı en az kaç birimdir?

3) $A(2, -1)$ noktası $x^2 + y^2 - 3x + 4y + 1 = 0$ çemberinin neresindedir?

4) $B(-2, 1)$ noktası $x^2 + y^2 - (m+1).x + 4y + 1 = 0$ çemberinin dışında olduğuna göre m ' nin alacağı en küçük tam sayı değeri kaçtır?

5) $A(3, 12)$ noktasına uzaklığı $B(-5, 1)$ noktasına uzaklığının yarısı olan noktaların geometrik yerini bulunuz.

ANALİTİK GEOMETRİ

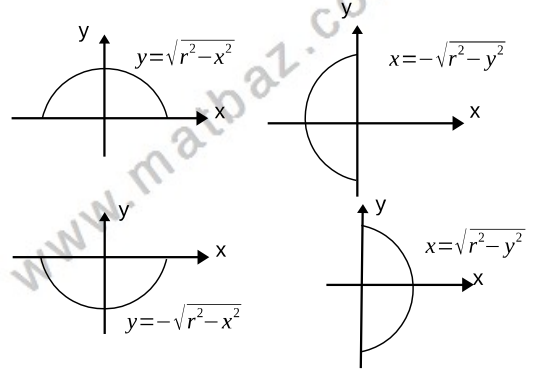
ÇEMBERİN ANALİTİĞİ

- 6) $A(4, 2)$ noktasının $2x - m.y + 3m + 8 = 0$ doğrularına göre simetrilerinin geometrik yerini bulunuz.

- 7) Verilen bir A noktasının verilen bir S noktasından geçen doğrulara göre simetrikleri ne belirtir?

- 8) $(x - 4)^2 + (y + 5)^2 = 40$ çemberi içindeki $P(2, -2)$ noktasından geçen kirişlerin orta noktalarının geometrik yer denklemini yazınız.

- 9) Standart çember denklemini kullanarak aşağıdaki bağıntıları elde ederiz



Yukarıda verilenlere göre aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

a) $\int_0^4 \sqrt{16-x^2} dx$

b) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} (\sqrt{1-x^2} - x) dx$