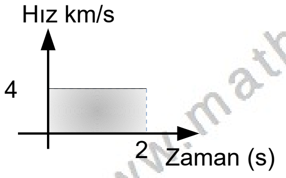
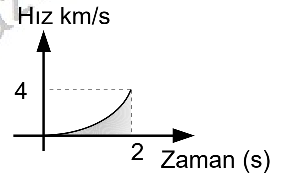
2.Hız – zaman grafiğinin altında kalan alan alınan yolu vermektedir, Şekilleri inceleyiniz. Doğrusal bir yolda hareket eden kişilerin ilk 2 saatte aldıkları yolu, grafikleri ile x–ekseni arasında kalan alan yardımıyla bulalım.





Birinci kişi 4.2=8 km yol almıştır. İkinci kişinin aldığı yolu bulmak için eğrinin altında kalan alanı küçük dikdörtgenler yardımıyla yaklaşık olarak hesaplayalım. İnceleyiniz .

Şimdi bu alan hesabını genelleyelim.

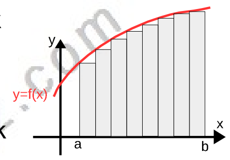
RİEMANN TOPLAMI OLARAK BELİRLİ İNTEGRALİ

y = f(x) sürekli bir fonksiyon olmak üzere, f(x) fonksiyonunun grafiği ile x ekseni arasında kalan ve x = a ile x = b doğrularının sınırladığı bölgenin alanı
a) y=f(x) grafiği doğrusal bir grafik olduğu zaman üçgen, yamuk gibi çokgensel alanların yardımıyla
b) y=f(x) grafiği doğrusal bir grafik olmadığı zaman ise Riemann toplamı ile bulunur. (Riemann toplamı alanı bulmak için genel bir yöntem olup her türlü grafiğe sahip fonksiyonlarda kullanılabilir) Riemann toplamı yönteminde, tanım kümesi alt aralıklara bölünür ve her aralıktan alınan bir sayının görüntüsü ile elemanın alındığı aralığın boyu çarpılır. Son adımda elde edilen sonuçların toplamı hesaplanır

Riemann toplamının alt toplam ve üst toplam olmak üzere 2 çeşidini hesaplayacağız.

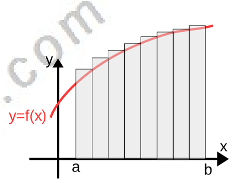
ALT TOPLAM

Alan bulunacak alt aralık olan [a,b] için parçalanışının sınır noktalarında, yüksekliği eğrinin altında bulunacak şekilde belirlenen dikdörtgenlerin alanları toplamı Riemann alt toplamı olarak tanımlanmıştır.(A_T) (Başka bir deyişle y=f(x) fonksiyonunun alt kısmında oluşan n tane dikdörtgenin alanları toplamına Riemann alt toplam denir.)



ÜST TOPLAM

Parçalanışının sınır noktalarında, yüksekliği eğrinin üstünde bulunacak şekilde belirlenen dikdörtgenlerin alanları toplamı Riemann üst toplamı olarak tanımlanmıştır.($Ü_T$) (Başka bir deyişle y=f(x) fonksiyonunun üst kısmında oluşan n tane dikdörtgenin alanları toplamına üst toplam denir.)



RİEMANN TOPLAMININ ADIMLARI

$f:[a,b]\rightarrow R$ sürekli bir fonksiyon olsun.

1.adım : Tabanların oluşturulması

Oluşturulacak dikdörtgenlerin taban uzunluklarını bulmak için [a,b] aralığından $a=x_0<x_1<x_2...<x_n=b$ olmak üzere n+1 nokta alınır. Bu n+1 noktanın oluşturduğu kümeye, $P=\{a=x_0<x_1<x_2...<x_n=b\}$ kümesine [a,b] kapalı aralığının bölüntüsü (parçalanışı) denir.

2.adım: Taban uzunluklarının bulunuşu

Bir [a,b] kapalı aralığının herhangi bir P parçalanışında $[x_0,x_1]$ ya birinci alt aralık $[x_1,x_2]$ ye ikinci alt aralık $[x_{k-1},x_k]$ ya k. alt aralık denir . Bu aralıkların uzunlukları $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ olur ve bu aralıklardan en büyüğüne P parçalanışının normu denir ve $\|P\|$ ile gösterilir.
Eğer aralık boylarının hepsi eşit ise parçalanışa düzgün parçalanış denir. Düzgün parçalanışta her bir taban eşit uzunlukta olup bu sayı Δx ile gösterilire $\Delta x=\frac{b-a}{n}$ olacağı açıktır.

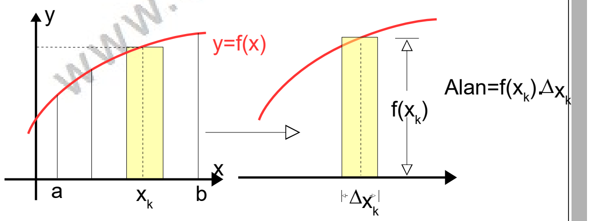
Örnek...1 :

[0,6] aralığı için P={0,2,5,6} bölüntüsü ile bu aralık [0,2] , [2,5] , [5,6] şeklinde alt aralıklara ayrılır. Burada $\Delta x_1=2$, $\Delta x_2=3$, $\Delta x_3=1$ ve P bölüntüsünün normu 3 tür.($\|P\|=3$)

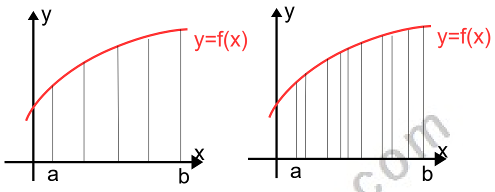
[0,6] için, aralığı 3 eşit alt aralığa bölünerek düzgün bölüntüsünü oluşturmak istersek P'={0,2,4,6} olacaktır.
Benzer şekilde uzunluğu eşit n aralığa bölmek istersek, bölüntünün normu $\Delta x=\frac{6-0}{n}=\frac{6}{n}$ olacaktır.

3.adım: Alanın hesaplanması

Şimdi her aralıktan bir reel sayı alalım ve k. aralıktan aldığımız bu sayıyı x_k ile gösterelim. İşte her alt aralıktan alınan bu x_k sayıları için $f(x_k)\Delta x_k$ sayılarının toplamına , yani $\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x_k$ toplamına, Riemann toplamı (R_T) denir.



Riemann toplamının Δx_k sayıları ve P parçalanışına bağlı olduğu açıktır. Şekilleri inceleyiniz.



[[a,b] aralığının P parçalanışındaki aralıklar küçüldükçe , eğri altında kalan dikdörtgenlerin alanlarının toplamının f fonksiyonun grafiği ile x ekseni arasındaki alana yaklaştığını görürüz. Bu nedenle parçalanışın normu olan $\|P\|$ küçüldükçe (başka bir deyişle sıfıra yaklaştıkça) bu parçalanışa ait Riemann toplamının yaklaştığı bir reel sayı değerinin , limitinin, olmasını bekleriz. (Fonksiyon sınırlı olmalı)

($A_T \leqslant R_T \leqslant Ü_T$) Alt aralıklar için, alt toplamda $f(x_k)$ en küçük, üst toplamda $f(x_k)$ en büyük değer)

Not: Parçalanışın orta noktalarına göre yükseklikler alınıp dikdörtgenlerin alanları toplamı bulunursa Riemann Orta toplamı hesaplanmış olur.

Hatırlatmalar: Toplam Sembolü

* $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

** $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

*** $\sum_{k=1}^{n} k = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

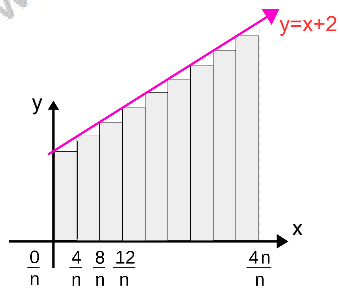
Örnek...2 :

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+2$ fonksiyonu ile x=0 doğrusu x=4 doğrusu ve x ekseniyle sınırlı bölgenin alanını Riemann toplamıyla tahmin ediniz (bulunuz)

Çözüm

[0,4] aralığının eşit bölünmesiyle her bir aralık $\frac{4-0}{n}=\frac{4}{n}$ olarak elde edilir. Yükseklik olarak, alt aralıkların

Alt toplam



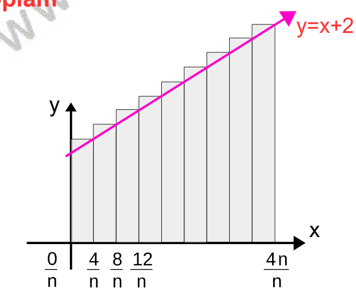
$$\frac{4}{n}\cdot\left(f\left(\frac{0}{n}\right)+f\left(\frac{4}{n}\right)+f\left(\frac{8}{n}\right)+\ldots+f\left(\frac{4n-4}{n}\right)\right)$$

$$\frac{4}{n}\cdot\left(\left(\frac{0}{n}+2\right)+\left(\frac{4}{n}+2\right)+\left(\frac{8}{n}+2\right)+\ldots+\left(\frac{4n-4}{n}+2\right)\right)$$

$$\frac{4}{n}\cdot\left(2n+\frac{2n-2}{n}\cdot n\right)=\frac{4}{n}\cdot(2n+2n-2)=\frac{4}{n}\cdot(4n-2)=\frac{16n-8}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{16n-8}{n}\right)=16$$

Üst toplam



$$\frac{4}{n}\cdot\left(f\left(\frac{4}{n}\right)+f\left(\frac{8}{n}\right)+\ldots+f\left(\frac{4n-4}{n}\right)+f\left(\frac{4n}{n}\right)\right)$$

$$\frac{4}{n}\cdot\left(\left(\frac{4}{n}+2\right)+\left(\frac{8}{n}+2\right)+\ldots+\left(\frac{4n}{n}+2\right)\right)$$

$$\frac{4}{n}\cdot\left(2n+\frac{2n+4}{n}\cdot n\right)=\frac{4}{n}\cdot(2n+2n+8)=\frac{4}{n}\cdot(4n+8)=\frac{16n+32}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{16n+32}{n}\right)=16$$

Ve bu sonuçla birlikte

$A_T \leqslant R_T \leqslant Ü_T$ olduğu için Riemann yöntemiyle alan 16 tahmin edilir.

GÖSTERİMLER

$f:[a,b]\to R$ bir fonksiyon olsun. P $[a,b]$ aralığının herhangi bir parçalanışı ve x_k' bu parçalanışa ait $[x_{k-1},x_k]$ aralığından seçilen herhangi bir reel sayı olsun.

Eğer $\|P\|\to 0$ için $\sum_{k=1}^{n} f(x_k')\Delta x_k = L$ olacak şekilde bir $L\in R$ sayısı varsa P parçalanışı ve x_k' sayılarının seçiminden bağımsız olarak f fonksiyonu $[a,b]$ arasında integrallenebilir ve $L\in R$ ye $[a,b]$ de f nin belirli integrali denir.
(bu aralıkta $y=f(x)$ fonksiyonu eğer negatif olmuyorsa bu limit değeri eğri ile x ekseni arasında kalan alanı verir)

$\|P\|\to 0$ yerine $n\to\infty$ aynı şey olarak düşünülebilir. $\Delta x = dx$, $(\Delta x\to 0)$

Özetle $\lim\limits_{\Delta x_k\to 0}\left(\sum_{k=1}^{n} f(x_k')\Delta x_k\right)=L\in\mathbb{R}$ oluyorsa bu limit değerine $y=f(x)$ fonksiyonunun a'dan b ye belirli integrali der ve bunu $\int_a^b f(x)dx$ olarak yazarız.
Burada a ve b sayılarına integralin alt ve üst limitleri denir

Kısaca $\lim\limits_{\Delta x_k\to 0}\left(\sum_{k=1}^{n} f(x_k')\Delta x_k\right)=L=\int_a^b f(x)dx$
bu ifade düzgün parçalanışta $(n\to\infty$ için $)$
$(\Delta x).\sum_{k=1}^{n} f(a+k.\Delta x)=(\Delta x).\sum_{k=1}^{n} f(a+(k-1).\Delta x)=L=\int_a^b f(x)dx$
biçimlerinde de ifade edilebilir. (Sağ ve sol uç nokta yaklaşım yöntemleri)

$$\sum_{k=1}^{n} \quad f(x_k') \quad \Delta x_k$$
$$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$$
$$\int_a^b \quad f(x) \quad dx$$

Önceki örnek için $16\leqslant R_T=\int_0^4 (x+2)dx\leqslant 16$

$\int_0^4 (x+2)dx=16$ elde edilir

(Not İntegral hesabın temel teoremi ile belirli integralleri Riemann toplamlarının limiti yerine başka ve daha kısa bir yöntemle hesaplayacağız)

Örnek...3 :

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x$ fonksiyonu ile $x=2$ doğrusu $x=4$ doğrusu ve x ekseniyle sınırlı bölgenin alanını Riemann toplamıyla bulunuz

Örnek...4 :

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2$ fonksiyonu ile $x=0$ doğrusu $x=2$ doğrusu ve x ekseniyle sınırlı bölgenin alanını Riemann toplamıyla bulunuz

Örnek...5 :

$\int_0^4 x\,dx$ belirli integralini bulunuz.

Çözüm
$f(x)=x$ fonksiyonu $[0,4]$ aralığında sürekli ve sınırlı olduğundan belirli integrali vardır.
$[0,4]$ aralığınının düzgün bölüntüsünün boyu $\frac{4}{n}$ ve alt aralıklar
$[0,\frac{4}{n}],[\frac{4}{n},2.\frac{4}{n}],\ldots,[(n-1)\frac{4}{n},\frac{4}{n}.n]$ olur.
Riemann üst toplam için $f(x_k)$ değerleri $f(\frac{4}{n}),f(\frac{8}{n}),\ldots,f(4)$ olacağından Riemann üst toplamı
$\frac{4}{n}.f(\frac{4}{n})+\frac{4}{n}.f(\frac{8}{n})+\ldots+\frac{4}{n}.f(\frac{4}{n}.n)$ olacaktır. Bu ise
$\frac{4}{n}(\frac{4}{n}+\frac{8}{n}+\ldots+\frac{4n}{n})=\frac{4}{n}.\left(\frac{4+8+\ldots+4n}{n}\right)=\frac{4}{n}.\left(\frac{4(1+2+\ldots+n)}{n}\right)$
$\frac{4}{n}.\left(\frac{2(n^2+2n)}{n}\right)=\frac{8n^2+16n}{n^2}$ ve n sınırsız olarak artarken (n sonsuza giderken limit alırsak) belirli integral 8 olarak elde edilir.
Aynı ifade bu aralıkta verilen (x) fonksiyon negatif olmadığından alana dönüştürülerek de yapabiliriz

Örnek...6 :

$\frac{1}{n}.\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2$ n değeri sonsuza giderken topladığımızda hangi belirli integrali elde ederiz?
Çözüm
b=1 ve a=0 alınırsa ifade
$\left(\frac{b-a}{n}\right).\sum_{k=1}^{n}(f(a+k.\Delta x))=\int_a^b f(x)dx$ olarak düşünüldüğünde
$\int_0^1 x^2dx$ elde edilir.

Örnek...7 :

$\frac{3}{n}.\sum_{k=1}^{n}\left(2+\frac{3k}{n}\right)$ ifadesi n değeri sonsuza giderken topladığımızda hangi belirli integrali elde ederiz?

Örnek...8 :

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1^5+2^5+3^5+\ldots+n^5}{n^6}\right)$ ifadesi hangi belirli integrali temsil eder?

Örnek...9 :

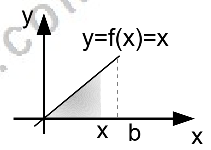
$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)+\sin\left(\frac{2}{n}\right)+\sin\left(\frac{3}{n}\right)+\ldots+\sin\left(\frac{n}{n}\right)}{n}\right)$ ifadesi hangi belirli integrali temsil eder?

Örnek...10 :

İntegralleri alana dönüştürerek hesaplayınız
a) $\int_0^4 x\,dx$ b) $\int_{-3}^6 7\,dx$ c) $\int_{-2}^2 |x|\,dx$

Örnek...11 :

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x$ fonksiyonunun grafiği veriliyor. Buna göre $x > 0$ için şekildeki taralı bölgenin alanını veren fonksiyonu bulalım ve bu fonksiyonun türevini şekildeki doğruyu temsil eden $y = f(x)=x$ fonksiyonu ile karşılaştıralım.



Sonuç:

İNTEGRAL HESABIN TEMEL TEOREMLERİ:
İNTEGRAL HESABIN TEMEL TEOREMİ I

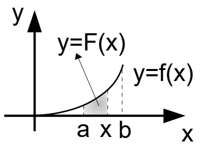
$f:[a,b]\to R$ sürekli bir fonksiyon ve

$F(x)=\int_a^x f(t)dt$ ise

$F'(x)=\dfrac{d(F(x))}{dx}=\dfrac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)dt\right)=f(x)$ yani sürekli her fonksiyon başka bir fonksiyonun türevidir. Başka bir deyişle türev ve integral işlemleri birbirlerinin tersi işlemlerdir. $(F(x)+c)'=f(x)$ olduğunun da farkına varınız

Örnek...12 :

Yandaki grafikte taralı bölgenin alanını veren F(x) fonksiyonu $F(x) = 2x^4+5x^3 +1$ olarak tanımlanmıştır.
İntegralin I. temel teoreminden yararlanarak f(x) fonksiyonunu bulmak istersek $F'(x)=f(x)$ olacağından $f(x)=8x^3+15x^2$ olur.



İNTEGRAL HESABIN TEMEL TEOREMİ II

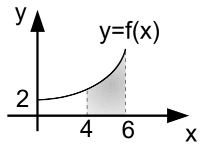
$f:[a,b]\to R$ sürekli bir fonksiyon ve

$\dfrac{d}{dx}(F(x))=f(x)$ ise $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$ olur.

Yani $\int_a^b f(x)dx$ ifadesini hesaplamak için Riemann toplamı ile sonuca gitmek yerine f(x) fonksiyonunun ilkeli olan F(x) gibi bir fonksiyonda integralin sınırlarını yazar oluşan farkı (F' de üst sınır değerinden alt sınır değerini çıkararak) cevap olarak hesaplarız verir.

Örnek...13 :

Yandaki grafikte Yandaki grafikte taralı bölgenin alanını veren F(x) fonksiyonu $F(x) = x^3+2x +1$ olarak tanımlanmıştır.



Buna göre $\int_4^6 f(x)dx=F(6)-F(4)=156\,br^2$ olarak elde edilir.

DEĞERLENDİRME

1) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3$ fonksiyonu ile x=0 doğrusu x=2 doğrusu ve x ekseniyle sınırlı bölgenin alanını Riemann toplamıyla bulunuz

2) İntegralleri alana dönüştürerek hesaplayınız

a) $\int_1^3 x\,dx$ b) $\int_{-3}^{6} dx$ c) $\int_{-4}^{3} |x+3|\,dx$ d) $\int_{-2}^{4} (8-x)\,dx$

3) $\frac{6}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{6}{n}+\frac{12}{n}+\frac{18}{n}\ldots+\frac{6n}{n}\right)$,n değeri sonsuza giderken topladığımızda hangi belirli integrali elde ederiz?

4) $\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ n değeri sonsuza giderken topladığımızda hangi belirli integrali elde ederiz?

Eğri altında kalan alana yaklaşım

$y=f(x)=x^2$ fonksiyonu ile x=0 doğrusu x=1 doğrusu ve x ekseniyle sınırlı bölgenin alanının yaklaşık değerini, n=10 parçaya ayırarak alt toplamla bulalım.

Yaklaşılan değer

$$\frac{1}{10}\cdot\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{k-1}{10}\right)^2=\frac{1}{1000}\cdot(0+1+4+\ldots81)=0{,}285$$

gerçek değer ise Riemann toplamı ile

$$\int_0^1 x^2dx=\frac{1}{n}\left(f(0)+f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+\ldots f\left(1-\frac{1}{n}\right)\right)$$

$$=\frac{1}{n}\left(0+\left(\frac{1}{n}\right)^2+\left(\frac{2}{n}\right)^2+\ldots+\left(\frac{n-1}{n}\right)^2\right)$$

$$=\frac{1}{n^3}\left(1^2+2^2+3^2+\ldots(n-1)^2\right)$$

$$\frac{1}{n^3}\left(\frac{(n-1)n.(2n-1)}{6}\right)=\frac{1}{3}=0{,}333=0{,}\bar{3}$$

hata yaklaşık %15 civarındadır.