

LİMİT - 4

SÜREKLİLİK

FONKSİYONLARDA SÜREKLİLİK

BİR NOKTADA SÜREKLİLİK

$A \subset \mathbb{R}$ için $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun.
 $a \in A$ olmak üzere, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ oluyorsa

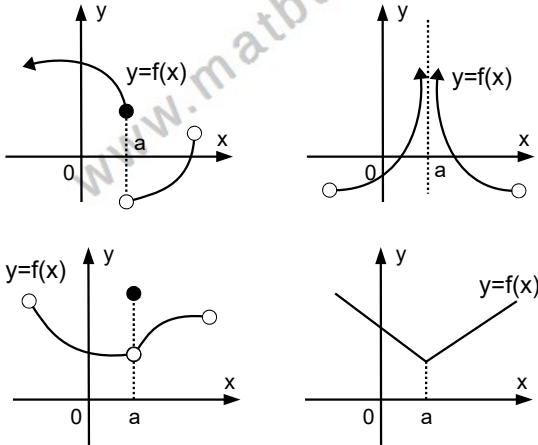
f fonksiyonu a noktasında sürekli denir. Bir noktada sürekli olmayan fonksiyona o noktada **süresiz bir fonksiyon** denir.

Tanıma göre f a da sürekli ise:

- 1) f fonksiyonu a da tanımlı,
- 2) $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ var ve
- 3) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$
koşullarının üçü de gerçekleşmelidir.

Örnek...1 :

Grafiği aşağıdaki gibi olan fonksiyonlar $x=a$ noktasında sürekli midir?



Örnek...2 :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + a & ; x \geq 3 \\ \frac{x^2 - x}{x^2 - 4} & ; x < 3 \end{cases}$$

fonksiyonu $x=3$ noktasında sürekli ise a kaçtır?

Örnek...3 :

$$f(x) = \begin{cases} a \cdot e^{x-1} & ; x = 0 \\ \frac{1 + \sin x}{2 + x} & ; x \neq 0 \end{cases}$$

fonksiyonu $x=0$ noktasında sürekli ise a kaçtır?

Örnek...4 :

$$f(x) = \frac{\sqrt{41}}{x^3 - x}$$

fonksiyonu hangi noktalarda süresizdir?

TANIM KÜMESİNDE SÜREKLİLİK

$A \subset \mathbb{R}$ ve $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun.
Her $x \in A$ için f fonksiyonu sürekli ise f tanım kümesinde sürekli bir fonksiyondur denir. Örneğin polinom fonksiyonlar tanım kümesinde sürekli olan fonksiyonlardır.

SAĞDAN VE SOLDAN SÜREKLİLİK

- 1) $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$ ise f soldan sürekli
- 2) $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$ ise f sağdan sürekli

denir.

Bir fonksiyonun bir noktada sürekli olması için sağdan ve soldan sürekli olması gerekir.

Örnek...5 :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - a & ; x < 5 \\ ax + 4 & ; x = 5 \\ (b-3)x + 4a & ; x > 5 \end{cases}$$

fonksiyonu 5 noktasında sağdan sürekli ise $a-5b$ kaçtır?

LİMİT - 4

SÜREKLİLİK

SÜREKSİZLİK

$I \subset \mathbb{R}$ ve $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $a \in \mathbb{R}$ olmak üzere $x=a$ noktasında sürekli değil ise f fonksiyonu $x=a$ noktasında süreksizdir denir.

BAZI FONKSİYONLARIN SÜREKSİZ OLDUĞU NOKTALARI BULMA

1) RASYONEL FONKSİYONLAR :

$f(x)=P(x)/Q(x)$ ve $P(x)$ ve $Q(x)$ polinom fonksiyonlar ise $Q(x)=0$ olduğu noktalarda f de tanımsız olacağından bu noktalarda fonksiyon süreksizdir.

Örnek...6 :

$f(x)=\frac{5x-3}{x^2-5x+6}$ fonksiyonun süreksiz olduğu noktaların apsileri toplamı kaçtır?

2) İRRASYONEL FONKSİYONLAR:

$f(x)=\sqrt[n]{g(x)}$ fonksiyonu $g(x) \geq 0$ için süreklidir.

Örnek...7 :

$f(x)=\sqrt[12]{2x-3}$ ve $g(x)=\frac{x^2}{x^2-x^4}$ fonksiyonları hangi noktalarda süreklidir?

3) PARÇALI FONKSİYONLAR :

Dalları oluşturan fonksiyonlarla beraber kritik noktalarda (yani fonksiyonun kural değiştirdiği noktalarda) süreklilik olup olmadığı araştırılmalıdır.

Örnek...8 :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} ; & x < 0 \\ \ln(x+1) ; & x = 0 \\ \frac{x}{x^2-1} ; & x > 0 \end{cases}$$

kaç noktada süreksizdir?

Örnek...9 :

Fonksiyonların sürekli oldukları aralıkları yazınız?

a) $f(x)=3x^2-5x+2$

b) $h(x)=\frac{\sin x}{2-\cos x}$

c) $u(x)=\sqrt{x^2-x+12}$

d) $v(x)=\sqrt[3]{x-12}$

e) $t(x) = \begin{cases} x^2-x ; & x \leq 0 \\ \frac{x^2-x}{x^2-4} ; & x > 0 \end{cases}$

Örnek...10 :

$$t(x) = \begin{cases} \frac{x^2-9}{x-3} ; & x \neq 3 \\ \frac{m \cdot \cos(x-3)}{x^2+9} ; & x = 3 \end{cases}$$

fonksiyonu reel sayılarda sürekli ise m değeri kaçtır?

BİR NOKTADA SÜREKLİ FONKSİYONLARIN ÖZELLİKLERİ

$A \subset \mathbb{R}$ olmak üzere $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ ve $g: A \rightarrow \mathbb{R}$ $x=a \in A$ da sürekli iki fonksiyon ise $f \pm g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ ve $k \cdot f$ ($k \in \mathbb{R}$) fonksiyonları da sürekli olur.

KAPALI BİR ARALIKTA SÜREKLİ FONKSİYONLARIN ÖZELLİKLERİ

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tanım kümesinde sürekli bir fonksiyon ise

1) f fonksiyonu bu aralıkta sınırlıdır. Yani Her $x \in \mathbb{R}$ için $|f(x)| < B$ olacak şekilde $B \in \mathbb{R}$ vardır.

2) f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında maksimum ve minimum değerlerine sahiptir.

3) $a < x_1 < x_2 < b$ için $f(x_1) \neq f(x_2)$ ise Bazı $c \in (x_1, x_2)$ öyle ki $f(c) \in (f(x_1), f(x_2))$

Örnek...11 :

$f: [-2, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x)=x^2+3x$ fonksiyonu x eksenini keser mi?

LİMİT - 4

SÜREKLİLİK

DEĞERLENDİRME

- 1) $f(x) = \sqrt{\frac{x^2 - 4x - 12}{x^2}}$
fonksiyonunu süreksiz yapan x değerleri nedir?

- 2) $f(x) = \sqrt{9 - |4x - 12|}$
fonksiyonunu sürekli yapan x değerleri nedir?

- 3) $v(x) = \sqrt[3]{\frac{x-1}{x^2-1}}$
fonksiyonunun sürekli olduğu en büyük küme nedir?

- 4) $g(x) = \log_{x-2}(\ln x)$
fonksiyonunun sürekli olduğu en büyük küme nedir?

- 5) $f(x) = 2^{\frac{x^2}{x^3-5}}$
fonksiyonunu süreksiz yapan x değerleri nedir?

- 6) $f(x) = \begin{cases} x^2 - a & ; & x < 3 \\ ax + b & ; & x = 3 \\ bx + 2 & ; & x > 3 \end{cases}$
sürekli bir fonksiyonsa a ve b yi bulunuz?

- 7) $f(x) = \begin{cases} \frac{a}{x^2-7} & ; & x < 3 \\ \frac{ax}{x+2} & ; & x = 3 \\ bx - 2 & ; & x > 3 \end{cases}$
fonksiyonu tam olarak 2 noktada süreksiz bir fonksiyonsa a ve b yi bulunuz?

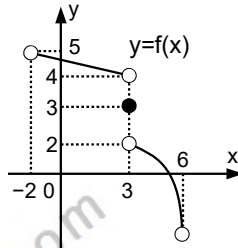
- 8) $g(x) = \frac{\sin x}{1 + 2 \cos x}$
fonksiyonunu $[0, 2\pi)$ aralığında süreksiz yapan x değerleri kaç tanedir?

LİMİT - 4

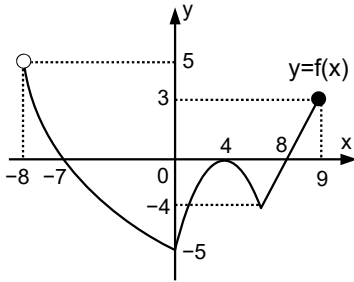
SÜREKLİLİK

- 9) $f(x) = \sqrt{x^2 - 7x - m}$ fonksiyonu tüm reel sayılarda sürekli ise m nasıl seçilmelidir?

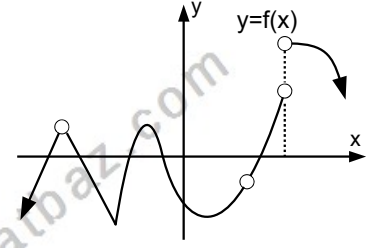
- 10) Grafiğe göre $f(x)$ fonksiyonu $(-2, 6)$ aralığında sürekli olduğu x tam sayı değerleri toplamı kaçtır?



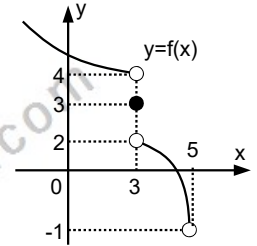
- 11) Grafiğe göre $g(x) = \frac{1}{1+f(x)}$ fonksiyonu $(-8, 9)$ aralığında kaç x reel sayı değeri için süreksizdir?



- 12) Grafiğe göre $y=f(x)$ fonksiyonu reel sayılarda kaç x reel sayı değeri için süreksizdir?



- 13) Şekilde $y=f(x)$ fonksiyonun grafiği veriliyor $f(x)+g(x)$ süreklidir. Buna göre $g(x)$ fonksiyonu nasıl bir grafiğe sahip olabilir, çiziniz?



Limit konusuna katkıları için araştırınız
Salih Zeki