

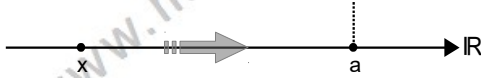
LİMİT - 1

KAVRAM VE ÖZELLİKLER

BAĞIMSIZ DEĞİŞKENİN BİR SAYIYA YAKLAŞMASI VE BİR FONKSİYONUN LİMİTİ

SOLDAN YAKLAŞMA

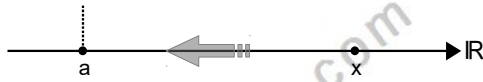
$a \in \mathbb{R}$ olsun. a sayısına, a sayısından daha küçük değerler ile yaklaşıyorsak bunu $x \rightarrow a^-$ ile belirtiriz.



Örneğin; $x \rightarrow 5^-$ yazdığımızda sırasıyla x değerlerini 4,5 , 4,9 , 4,99 gibi değerler aldığını düşünürüz. Burada x sayısı 5 e çok yakın fakat 5 den küçük bir sayıdır.

SAĞDAN YAKLAŞMA

a sayısına, a sayısından daha büyük değerler ile yaklaşıyorsak bunu $x \rightarrow a^+$ ile belirtiriz.



Örneğin şekilde $x \rightarrow 5^+$ yazmışsak sırasıyla x değerlerini 5,5 , 5,1 ,5,01 gibi değerler aldığını düşünürüz. Burada değerler x sayısına ne kadar yakın seçilirse $x \rightarrow 5^+$ o kadar iyi temsil edilmiş sayılır.

Örnek...1 :

Aşağıdaki ifadeleri sembolik olarak yazınız.

x in 3 e soldan yaklaşması	
x in -7 ye sağdan yaklaşması	
a nın b ye sağdan yaklaşması	

Örnek...2 :

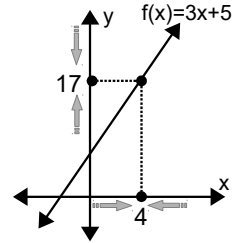
$x \rightarrow -3^+$ olduğuna göre, x^2+7 hangi tam sayıya en yakındır?

Örnek...3 :

Bir noktada sağdan ve soldan yaklaşımı bir örnekte inceleyelim. $f(x)=3x+5$ fonksiyonu için x değişkeninin 4 sayısına yaklaşıırken aldığı değerler tabloda verilmiştir.

$f(x)=3x+5$						
$4^- \rightarrow$			4	$\leftarrow 4^+$		
3,8	3,9	3,99		4,01	4,1	4,2
16,4	16,7	16,97	17	17,03	17,3	17,6

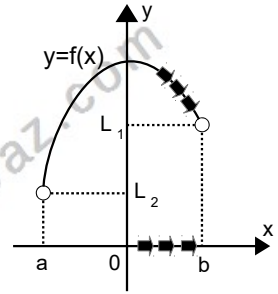
Bu tabloda x değişkeni 4 e yaklaşıırken, $y=f(x)$ değeri 17 sayısına yaklaşımaktadır.



SOLDAN LİMİTİN SEZGİSEL TANIMI

f , (a,b) aralığında tanımlı bir fonksiyon olsun. $f(x)$ fonksiyonu, x değişkeni b ye bu aralıktan yaklaşıırken L_1 görüntü değerine (ordinat değerine) yaklaşıyorsa f fonksiyonun b noktasında soldan limiti L_1 dir denir ve

$$\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = L_1 \text{ ile belirtilir.}$$

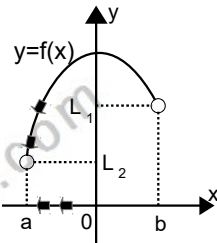


SAĞDAN LİMİTİN SEZGİSEL TANIMI

f , (a,b) aralığında tanımlı bir fonksiyon olsun. $f(x)$ fonksiyonu, x değişkeni a sayısına bu aralıktan sayı değerleri olarak yaklaşıırken görüntü olarak L_2 değerine

yaklaşıyorsa, f fonksiyonun a noktasında ki sağdan limiti L_2 dir denir.

a noktasındaki sağdan limit sembolik olarak $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L_2$ ile belirtilir.



LİMİT – 1

KAVRAM VE ÖZELLİKLER

UYARI:

Soldan ve sağdan limit tanımların da limit bulunurken fonksiyonun bu noktada tanımlı olması **gerekmez**.

SONUÇ

Bir fonksiyonun bir c noktasında sağdan limiti L_1 , soldan limiti L_2 ve

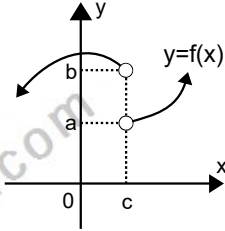
$$L_1 = L_2 = L$$

ise fonksiyonun c noktasında limiti vardır ve L dir denir. Sembolik olarak bunu **$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$** ile ifade ederiz.

Örnek...4 :

$x=c$ noktasında soldan limit b ve sağdan limit a olduğundan limit yoktur.

$$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow c^-} f(x)$$

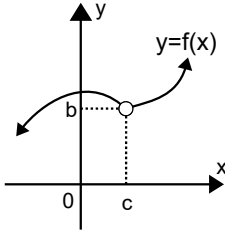


Örnek...5 :

$x=c$ noktasında sol limit b ve sağ limit de b olduğundan $x=c$ için limit b dir.

Burada $x=c$ için fonksiyonun tanımsız olması limitin var olmasına engel değildir.

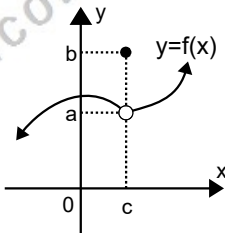
$$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = b \text{ dolayısıyla } \lim_{x \rightarrow c} f(x) = b$$



Örnek...6 :

$x=c$ noktasında sol limit a ve sağ limit a olduğundan $x=c$ için limit a dir.

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = a$$



UYARI

$x=c$ için fonksiyon görüntüsünün ,limitle eşit olmaması bu noktada fonksiyonun limiti olmasına **engel değildir**.

$$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} f(x) = a$$

Limit değerini ve aynı noktadaki görüntü değeri arası ilişki fonksiyonların sürekliliği başlığında incelenecektir.

Örnek...7 :

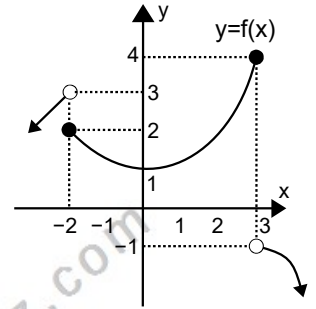
Yanda grafiği verilen fonksiyon için istenen limitleri bulunuz.

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) =$$



Örnek...8 :

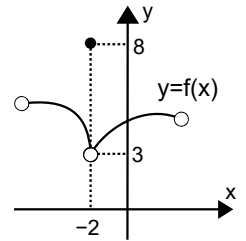
Yanda grafiği verilen fonksiyon için istenen limitleri bulunuz?

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) =$$

$$f(2) = ?$$

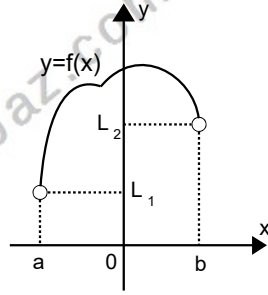


LİMİT – 1

KAVRAM VE ÖZELLİKLER

UYARI

Bir $f(x)$ fonksiyonu (a,b) aralığında tanımlanmış olsun. $f(x)$ fonksiyonunun $x=a$ noktasındaki sağ limiti fonksiyonun o noktadaki limitidir. $x=a$ noktasının sol tarafında fonksiyon tanımsız olduğundan sol limite bakmaya gerek yoktur. $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_1$



Ayrıca $x=b$ noktasındaki sol limit fonksiyonun o noktadaki limitidir. $x=b$ 'nin sağ tarafında fonksiyon tanımsız olduğundan o noktada sağ limite bakılmaz. $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow b} f(x) = L_2$

Örnek...9 :

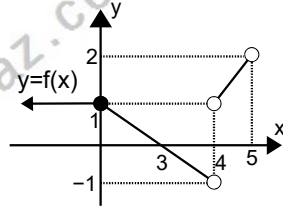
Grafiğe göre istenen limitleri bulunuz.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 5} f(x) =$$



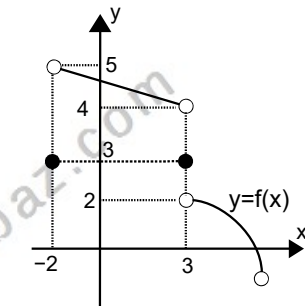
Örnek...10 :

Grafiğe göre istenen limitleri bulunuz.

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) =$$



LİMİT ALMA KURALLARI :

TEOREM 1

f polinom fonksiyon veya $x=a$ noktası f fonksiyonun kritik noktası **değilse** (rasyonel fonksiyonlar için paydanın köklerinden biri, parçalı fonksiyonlar için sınır noktaları, mutlak değer veya logaritma fonksiyonunun içini 0 yapan değerler)

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \text{ olur.}$$

Örnek...11 :

$$\lim_{x \rightarrow 2} x^3 = ?$$

Örnek...12 :

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} x^2 + x + \ln(x-3) = ?$$

TEOREM 2

L, M, c ve k birer reel sayı ve $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M \text{ olsun.}$$

$$1) \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \mp g(x)) = L \mp M$$

$$2) \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = L \cdot M$$

$$3) \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{L}{M} \quad (M \neq 0)$$

$$4) \lim_{x \rightarrow a} k \cdot f(x) = k \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x) = k \cdot L$$

$$5) \lim_{x \rightarrow a} (g \circ f)(x) = g\left(\lim_{x \rightarrow a} f(x)\right) = g(L)$$

$$a) \lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L}, \sqrt[n]{L} \in \mathbb{R}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow a} c^{f(x)} = c^L$$

$$c) \lim_{x \rightarrow a} \log f(x) = \log(\lim_{x \rightarrow a} f(x)) = \log(L), \log L \in \mathbb{R}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L \text{ ve } f(x) \leq h(x) \leq g(x)$$

$$\text{ise } \lim_{x \rightarrow a} h(x) = L \text{ olur.}$$

LİMİT – 1

KAVRAM VE ÖZELLİKLER

Örnek...13 :

$$\lim_{x \rightarrow 1} 5x^2 = ?$$

Örnek...14 :

$$\lim_{x \rightarrow 0} (3x^3 - 7x^2 + 12x + 21) = ?$$

Örnek...15 :

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} (4x^2 - 5x + 13) = ?$$

Örnek...16 :

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} (5^x + x^2 - 4x + 3) = ?$$

Örnek...17 :

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^4 + x^2 + 1)}{(x - 3)} = ?$$

Örnek...18 :

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{3} - 3)}{|x - x^2 + 1|} = ?$$

Örnek...19 :

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{x^2 - \sqrt{x+22}})}{\sqrt{2x+17}} = ?$$

Örnek...20 :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 5, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 2 \text{ ise}$$

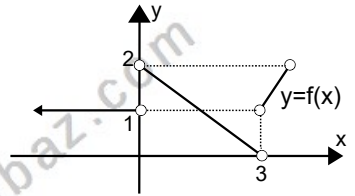
$$\lim_{x \rightarrow a} \left(f(x) \cdot g^2(x) - \frac{f(x)}{g(x)} \right) = ?$$

Örnek...21 :

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{x^5 + 4x^4 + 2x^3 - x^2}{x^7} \right) = ?$$

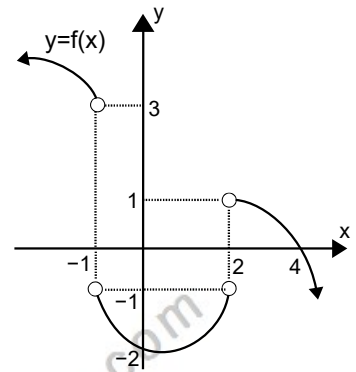
Örnek...22 :

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(5-x) = ?$$



Örnek...23 :

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} (f \circ f)(x) = ?$$



LİMİT – 1

KAVRAM VE ÖZELLİKLER

TRİGONOMETRİK LİMİTLER

$y=\sin x$ ve $y=\cos x$ fonksiyonları tüm reel sayılarda tanımlıdır dolayısıyla

$$\lim_{x \rightarrow a} \sin x = \sin a, \lim_{x \rightarrow a} \cos x = \cos a$$

$y=\tan x$ ve $y=\cot x$ fonksiyonları tüm reel sayılarda tanımlı değildir. Tanımlı olduğu her nokta için

$$\lim_{x \rightarrow a} \tan x = \tan a, \lim_{x \rightarrow a} \cot x = \cot a$$

Tanımlı olmadığı noktalarda gerekirse sağ ve sol limitlere bakılmalıdır.

Örnek...24 :

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \sin x = ?$$

Örnek...25 :

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{2\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} = ?$$

Örnek...26 :

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x - \tan^3 x}{\sec^2 x} = ?$$

Örnek...27 :

$$\lim_{x \rightarrow \frac{2\pi}{3}} \frac{\cot^2 x - \sin^2 x}{\cos x} = ?$$

Örnek...28 :

$$\lim_{x \rightarrow \frac{5\pi}{4}^+} \frac{|\csc x|}{\tan x} = ?$$

Örnek...29 :

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{\cos x}{|\cos x|} = ?$$

Limit konuduna katkıları için araştırınız
Cauchy

LİMİT – 1

KAVRAM VE ÖZELLİKLER

DEĞERLENDİRME

- 1) $x \rightarrow -3^+$ olduğuna göre, $x^2 + 40x + 1$ ifadesinin değerinden küçük en büyük tam sayı kaçtır?

- 2) $\lim_{x \rightarrow a^2} \left(\frac{13}{1+x} \right) = \frac{1}{2}$ ise $a > 0$ sayısı kaçtır?

- 3) $\lim_{x \rightarrow 1} (2x^3 + ax + 5) = 0$ ise a sayısı kaçtır?

- 4) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{(3^x + 4^x)}{5^x} \right) = ?$

- 5) $\lim_{x \rightarrow 2} \log(x-3) = ?$

- 6) $\lim_{x \rightarrow 4} \ln(x-3) = ?$

- 7) $\lim_{x \rightarrow 1} \ln(x-2) = ?$

- 8) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ ve
 $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x) - 3f(x) + 2) = 0$ ise
 $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x))$ kaç olabilir?

- 9) $\lim_{x \rightarrow 2} (x^{70} - 2x^{69} + 3x^2 + 4) = ?$

- 10) $\lim_{x \rightarrow 5} \left(\frac{x-5}{x^2+25} \right) = ?$

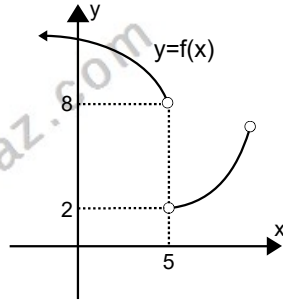
LİMİT – 1

KAVRAM VE ÖZELLİKLER

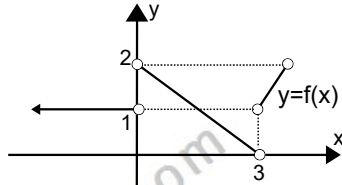
11)

a) $\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = ?$

b) $\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = ?$

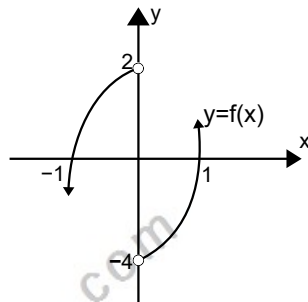


12) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x^2) = ?$



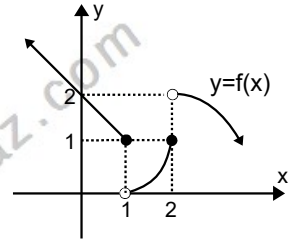
13)

$$\frac{\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x^2)}{\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x^3)} = ?$$



14)

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (f \circ f \circ f)(x) = ?$$



15) ABCD bir dikdörtgen ve G noktası bu dikdörtgenin ağırlık merkezi olsun. F noktası ABCD nin iç bölgesinde bir noktadır.

$$|BE| = \frac{|BC|}{3} \quad |BK| = \frac{|BA|}{4} \quad \text{ise}$$

$$\lim_{F \rightarrow G} \left(\frac{A(ABCD)}{A(BEFK)} \right) = ?$$

