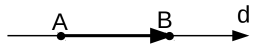
VEKTÖR



Şekli inceleyiniz. A başlangıç ve B bitim noktası alınırsa AB yönlü doğru parçası elde edilir.

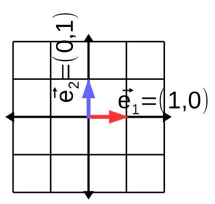
AB yönlü doğru parçası $\overrightarrow{AB}$ biçiminde gösterilir.

Bir yönlü doğru parçası doğrultu , yönü ve büyüklüğü ile belirlenir.

Birbirine eş olan yönlü doğru parçalarının kümesine vektör denir ve bu küme herhangi bir elemanı ile temsil edilir. Yandaki kümedeki eş yönlü doğru parçaları $\overrightarrow{AB}$ ile temsil edilebilir.

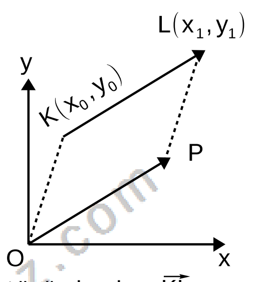
STANDART BİRİM VEKTÖRLER

O noktasında birbirine dik olan $\vec{e}_1=(1,0)$ ile $\vec{e}_2=(0,1)$ vektörleri birim vektörlerdir.



KONUM (YER) VEKTÖRÜ

Analitik düzlemde başlangıç noktası $K(x_0,y_0)$ bitim noktası $L(x_1,y_1)$ olan $\overrightarrow{KL}$ vektörüne eş ve başlangıç noktası orjin olan $\overrightarrow{OP}$ vektörüne $\overrightarrow{KL}$ vektörünün konum vektörü denir. $\overrightarrow{KL}$ = $\overrightarrow{OP}=(x_1-x_0,y_1-y_0)$ olarak gösterilir.



Her vektör $\vec{e}_1=(1,0)$ ile $\vec{e}_2=(0,1)$ vektörlerinin lineer bileşimi (doğrusal kombinasyonu) olarak yazılabilir. Bu iki vektöre temel taban vektörler de denir.

Örnek...1 :

A(3,2) , B(7,-3) ise $\overrightarrow{AB}$ ve $\overrightarrow{BA}$ vektörlerini standart birim vektörlerin lineer bileşimi olarak yazınız ve boylarını bulunuz.

$\overrightarrow{AB}=(4,-5)=4\vec{e}_1-5\vec{e}_2$, $\overrightarrow{BA}=(-4,5)=-4\vec{e}_1+5\vec{e}_2$

Örnek...2 :

Vektörleri temel taban vektörler türünden yazınız

$\vec{A}=(3,2)$

$\vec{A}=(-8,1)$

$\vec{A}=(0,-6)$

$3\vec{e}_1+2\vec{e}_2$, $-8\vec{e}_1+\vec{e}_2$, $-6\vec{e}_2$

Örnek...3 :

$\vec{A}=(2,4)$ ile $\vec{B}=3\vec{e}_2-k.\vec{e}_1$ vektörleri paralelse x kaçtır?

$\frac{3}{2}$

İÇ ÇARPIM

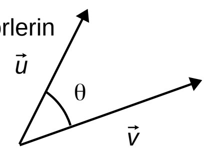
$\vec{u}=(x_1,y_1)$ ve $\vec{v}=(x_2,y_2)$ vektörleri için hesaplanan $\langle\vec{u},\vec{v}\rangle=\vec{u}.\vec{v}=x_1.x_2+y_1.y_2$ sayısı $\vec{u}$ ile $\vec{v}$ vektörlerinin skaler çarpımı olarak tanımlanır.

Skaler çarpma elde edilen sabit bir değer olup bir vektör değildir.

TEOREM

$\vec{u}$ ile $\vec{v}$ vektörleri arası açı (vektörlerin başlangıç noktaları aynı olduğu durumda) θ ise

$\langle\vec{u},\vec{v}\rangle=\vec{u}.\vec{v}=|\vec{u}|.|\vec{v}|.\cos(\theta)$



SKALER ÇARPIMIN ÖZELLİKLERİ

$\vec{A}.\vec{B} = \vec{B}.\vec{A}$

$\vec{A}.(\vec{B}+\vec{C})=\vec{A}.\vec{B}+\vec{A}.\vec{C}$

$\vec{A}.(\vec{B}.\vec{C})\neq(\vec{A}.\vec{B}).\vec{C}$ (genellikle)

$(m.\vec{A}).(n.\vec{B})=(m.n)\vec{A}.\vec{B}$

$(m.\vec{A}).\vec{B}=m(\vec{A}.\vec{B})=\vec{A}(m.\vec{B})$

$\vec{A}.\vec{A}=|\vec{A}|^2$

Örnek...4 :

$\vec{A}=5\vec{e}_1-\vec{e}_2$ ve $\vec{B}=3\vec{e}_1-5\vec{e}_2$ ise $\vec{A}.\vec{B}=?$

20

Örnek...5 :

$\vec{A}=3\vec{e}_1-4\vec{e}_2$ ve $\vec{B}=-5\vec{e}_2$ ise bu vektörler arası açının kosinüsü kaçtır?

$\frac{3}{25}$

Örnek...6 :

$\vec{A}=2\vec{e}_2-4\vec{e}_1$ ve $\vec{B}=m\vec{e}_1+3\vec{e}_2$ ve $\vec{A}.\vec{B}=10$ ise m kaçtır?

-1

Örnek...7 :

$\vec{A}=(-2,k)$ ve $\vec{B}=3\vec{e}_1-4\vec{e}_2$ ve $\vec{A}.\vec{B}\vec{A}=22$ ise k değerlerini bulunuz.

2,-6

Örnek...8 :

$\vec{B}=5\vec{e}_1-12\vec{e}_2$ İse $\vec{B}.\vec{B}$ kaçtır?

169

Örnek...9 :

$\vec{A}$ ile $\vec{B}$ vektörleri arası açı 60° ve $|\vec{A}|=6$ ve $|\vec{B}|=8$ ise $\vec{A}.\vec{B}$ kaçtır ?

24

Örnek...10 :

$\vec{A}$ ile $\vec{B}$ vektörleri arası açı 120° ve $|\vec{A}|=3$ ve $|\vec{B}|=4$ ise $(2.\vec{A}+\vec{B})(3.\vec{A}-2\vec{B})$ kaçtır ?

92

Örnek...11 :

$|\vec{A}|=5$ ve $|\vec{B}|=2$ ise $2.\vec{A}+\vec{B}=(3,-2)$ $\vec{A}.\vec{B}$ kaçtır ?

$\frac{-91}{4}$

Örnek...12 :

$\vec{A}$ ile $\vec{B}$ vektörleri arası açı 120° ve $|\vec{A}|=3$ ve $|\vec{B}|=4$ ise $|2.\vec{A}+\vec{B}|$ kaçtır ?

$2\sqrt{7}$

Örnek...13 :

$\vec{A}$ ile $\vec{B}$ vektörleri arası açı 135^o ve $|\vec{A}|=3\sqrt{2}$ ve $|\vec{B}|=4$ ise $|\vec{A}-\vec{B}|$ kaçtır ?

$\sqrt{58}$

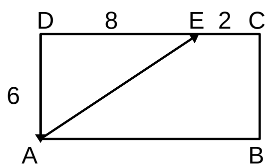
Örnek...14 :

$|\vec{A}|=6$ ve $|\vec{B}|=4$ ve $\vec{A}.\vec{B}=12\sqrt{2}$ ise $\vec{A}$ ile $\vec{B}$ vektörleri arası açı kaç derecedir

45^o

Örnek...15 :

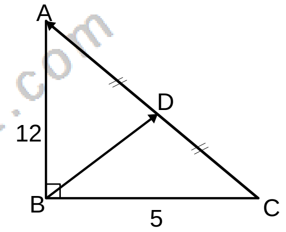
ABCD dikdörtgen
$|AD|=6br, |CE|=2br,$
$|DE|=8br$
ise $\vec{DA}.\vec{AE}$ kaçtır?



36

Örnek...16 :

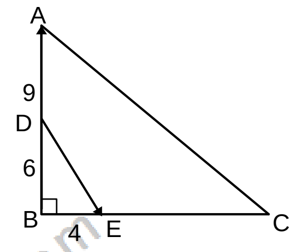
ABC bir diküçgen D AC nin orta noktası ve
$|BC|=5br, |BA|=12br$
olmak üzere $\vec{BD}.\vec{CA}$ kaçtır?



$\frac{119}{2}$

Örnek...17 :

ABC bir dik üçgendir.
$|BE|=4br, |BD|=6br$ ve
$|AD|=9br$ olmak üzere
$\vec{BA}.\vec{DE}$ kaçtır?



-90

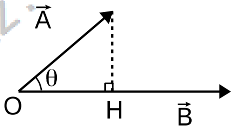
Örnek...18 :

Analitik düzlemde $\vec{A}=(-2,4)$ ve $\vec{B}=(2,1)$ vektörlerinin açıortayı $\vec{C}=(y,6)$ vektörü ise y kaçtır?

2

BİR VEKTÖRÜN BAŞKA BİR VEKTÖRÜN ÜZERİNE İZDÜŞÜMÜ

şekilde $\vec{A}$ vektörünün $\vec{B}$ üzerine izdüşümü alınmıştır.



İzdüşümün boyu : $|OH|=\dfrac{\vec{A}.\vec{B}}{|\vec{B}|}$

izdüşüm vektörü : $\overrightarrow{OH}=\left(\dfrac{\vec{A}.\vec{B}}{|\vec{B}|}\right).\dfrac{\vec{B}}{|\vec{B}|}$

olarak elde edilir.

İki vektör arasındaki açı 90° ise dik izdüşüm nokta; 90° dan büyükse izdüşüm alınan vektörle aynı doğrultulu ve zıt yönlü olacaktır (izdüşüm boyu negatif).

Örnek...19 :

$\vec{A}=3\vec{e}_1-4\vec{e}_2$ ve $\vec{B}=2\vec{e}_1-5\vec{e}_2$ ise $\vec{A}$ nün $\vec{B}$ vektörü üzerine izdüşüm vektörününün boyunu bulunuz

$\dfrac{26}{\sqrt{29}}$

Örnek...20 :

$\vec{K}=-2\vec{e}_2$ ve $\vec{KL}=3\vec{e}_1-\vec{e}_2$ ise $\vec{K}$ nün $\vec{L}$ vektörü üzerine izdüşüm vektörününün boyunu bulunuz

$\sqrt{2}$

Örnek...21 :

$\vec{P}=(3,5)$ vvektörünün y=x (genel olarak y=x+c) doğrusu üzerine izdüşüm vektörününün boyunu bulunuz

$4\sqrt{2}$

Örnek...22 :

$\vec{A}=(2,3)$ $\vec{B}=(4,3)$ vektörleri veriliyor $\vec{A}$ nün $\vec{B}$ vektörü üzerine izdüşüm vektörünü bulunuz

$\left(\dfrac{68}{25},\dfrac{51}{25}\right)$

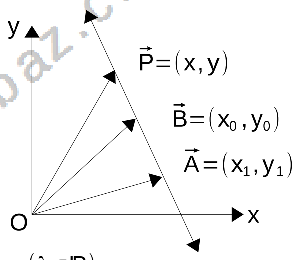
Örnek...23 :

$\vec{A}=-\vec{e}_2+\vec{e}_1$ ve $\vec{AB}=2\vec{e}_1-3\vec{e}_2$ ise $\vec{A}$ nün $\vec{B}$ vektörü üzerine izdüşüm vektörünü bulunuz

$\left(\dfrac{21}{25},-\dfrac{28}{25}\right)$

DOĞRUNUN VEKTÖREL DENKLEMİ

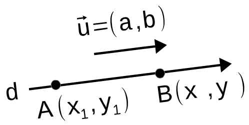
Şekildeki AB doğrusu üzerinde değişen P(x,y) noktaları için $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\lambda.\overrightarrow{AB}$ yazılan vektörel eşitliği bu doğrunun vektörel denklemidir. $(\lambda\in\mathbb{R})$



Özetlersek, düzlemde $A(x_1,y_1)$ ve $B(x,y)$ noktalarından geçen ve $\vec{u}=(a,b)$ vektörüne paralel olan doğrunun

a) vektörel denklemi

$\overrightarrow{AB}=k.\vec{u}$



$(x-x_1,y-y_1)=k.(a,b)$

b) parametrik denklemi

$x=a.k+x_1$
$y=b.k+y_1$

c) kapalı denklemi (kartezyen denklem)

Parametre k çekilirse $\dfrac{x-x_1}{a}=\dfrac{y-y_1}{b}=k$ kartezyen denklemi elde edilir. Bu denklem düzenlenerek m.x+n.y=p haline getirilebilir.

Burada $\vec{u}=(a,b)$ vektörüne doğrunun doğrultman vektörü denir.
Doğrultman vektörüne dik olan vektöre normal vektörü denir. ($\vec{N}=k.(b,-a)$,$k\in\mathbb{R}$)

Örnek...24 :

$\vec{A}=4\vec{e}_1-3\vec{e}_2$ vektörüne paralel ve K(1,-3) noktasından geçen doğrunun vektörel, parametrik ve kapalı denklemini yazınız.

Örnek...25 :

$\vec{A}=2\vec{e}_2-3\vec{e}_1$ vektörüne paralel ve K(1,-3) noktasından geçen doğrunun vektörel, parametrik ve kapalı denklemini yazınız.

$(x,y)=(1,3)+k.(2,-3)$
$x=2k+1$
$y=-3k+3$
$\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-3}{-3}$

Örnek...26 :

A(1,2) ve B(-2,1) noktalarından geçen doğrunun vektörel, parametrik ve kapalı denklemini yazınız.

$(x,y)=(1,2)+k.(-3,-1)$
$x=-3k+1$
$y=-k+2$
$\dfrac{x-1}{3}=y-2$

Örnek...27 :

$x=3t-2, y=2t+5$ parametrik denklemiyle verilen doğrunun kapalı denklemini yazınız.

$\dfrac{x+2}{3}=\dfrac{y-5}{2}$, $3y-2x-19=0$

Örnek...28 :

Vektörel denklemi
(x, y) = (-2, 3) + λ (4, -5), $(\lambda \in \mathbb{R})$ olarak verilen doğrunun, doğrultman vektörünü , parametrik denklemini kapalı denklemini bulunuz.

$\vec{u}=(4,-5)$

$x=4\lambda-2$
$y=-5\lambda+3$

$\frac{x+2}{4}=\frac{y-3}{-5}$, $5x+4y-2=0$

Örnek...29 :

Köşe noktaları A(0,0) , B(4,0) ve C(8,6) olan üçgenin BC kenarına ait yüksekliğinin üzerinde bulunduğu doğrunun vektörel denklemini bulunuz.

$(x,y)=\lambda(-3,2)$

Not: Bir doğruya dik olan vektöre , doğrunun normal vektörü denir. Normal ve doğrultman vektörleri dikdir.
ax+by+c=0 doğrusunun
doğrultman vektörü $\vec{D}=k.(-b,a)$
Normal vektörü $\vec{N}=m.(a,b)$ (k ve m, 0 dan farklı reel sayılar olmak üzere)

Örnek...30 :

3x+4=5y doğrusunun
a) normal
b) doğrultman vektörlerini bulunuz.

$\vec{N}=k.(3,-5)$, $\vec{D}=r.(5,3)$ $k,r\in\mathbb{R}-\{0\}$

Örnek...31 :

Normal vektörü $\vec{N}=(-2,3)$ olan ve K(2,-7) noktasından geçen doğrunun denklemini yazınız.

$-2x+3y+25=0$

Örnek...32 :

A(1, 2) noktasından geçen ve $\vec{N}=(3,4)$ vektörüne dik olan doğrunun kapalı denklemini bulunuz.

$3x+4y-25=0$

Örnek...33 :

2x-3y=1 ve x+y+3=0 doğruları arasındaki dar açının kosinüs değerini normal vektörleri kullanarak bulunuz.

$\frac{-1}{\sqrt{26}}$

VEKTÖR

ALIŞTIRMALAR

1) 2x-3y=1 ve x+y+3=0 doğruları arasındaki dar açının tanjantını normal vektörleri kullanarak bulunuz

2) $x=-t+k, y=2t+5$ parametrik denklemiyle verilen doğru A(3,4) noktasından geçiyorsa k kaçtır?

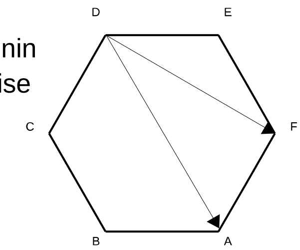
3) Analitik düzlemde A(-3, x) noktası (x, y) = (5, 2) + k.(1, –2) denklemi ile verilen doğrunun üzerinde olduğuna göre x değerini bulalım.

4) Analitik düzlemde bir d doğrusu, $\vec{U}=(5,-2)$ vektörüne paralel ve $\vec{V}=(y,y+2)$ vektörüne dik ise y değerini bulalım.

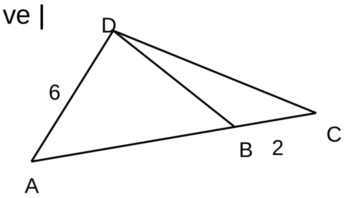
5) $x=-2, y=2t+5$ parametrik denklemiyle verilen doğrunun kapalı denklemini yazınız.

6) Şekildeki aracın saatteki hızı, yönü ve şiddeti durgun suda $\vec{u}=(4,0)$ vektörü ile ifade ediliyor.Bu sandal akıntının $\vec{u}=(-1,3)$ olarak tanımlandığı bir nehirde 4 saat yol aldığında, hareketebaşladığı noktadan ne kadar uzaklaşmış olur.

7) Şekildeki düzgün altıgenin alanı $96\sqrt{3}$ birim kare ise $\overrightarrow{DF}.\overrightarrow{DA}$ kaçtır?



8) Şekilde |AD|=|DB|=6 br ve |DC|=2 ve |AB|=4 br ise $\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{BC}$ kaçtır?



9) Köşelerinin koordinatları A(0, 0), B(3, 4) ve C(0, 8) olan ABC üçgeninde [AB] kenarına ait yükseklik uzunluğunu vektör kullanarak bulunuz.

10) Köşelerinden üçünün koordinatları A(1, 2), B(5, 7) ve C(0, 8) olan ABCD paralelkenarının alanını vektör kullanarak bulunuz.