

ÇEMBER ANALİTİĞİ

ÇEMBERİN ANALİTİĞİ

TANIM

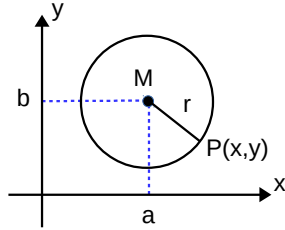
Bir noktadan eşit uzaklıktaki noktaların geometrik yeri **düzlemde çember** belirtir.

ÇEMBERİN STANDART VE VEKTÖREL DENKLEMİ

$M(a,b)$ ve $P(x,y)$ noktaları arasındaki uzaklıktan denklemler

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

(Standart denklem)



$\|\vec{MP}\| = r$ ise M merkezli ve r yarıçaplı çemberin vektörel denklemidir.

Örnek...1 :

$M(3,5)$ ve yarıçapı 4 birim olan çemberin standart denklemini yazınız.

$$(x-3)^2 + (y-5)^2 = 16$$

Örnek...2 :

$(x+3)^2 + (y-1)^2 = 20$ çemberinin merkez ve yarıçapını bulunuz.

$$M(-3,1)$$
$$r = 2\sqrt{5}$$

MERKEZİL ÇEMBER :

Merkezi orijinde olan çemberlere denir. Yani $M(0,0)$ ve yarıçapı r ise çemberin denklemi $x^2 + y^2 = r^2$ biçimindedir.

Örnek...3 :

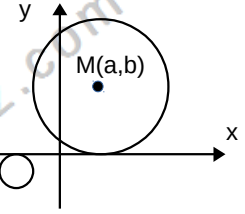
$(2x-1)^2 + (2y+3)^2 = 40$ çemberinin merkez ve yarıçapını bulunuz.

$$M\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$$
$$r = \sqrt{10}$$

EKSENLERE TEĞET ÇEMBERLER :

x eksenine teğet çemberlerin yarıçapı

$|b| = r$ dir.



Örnek...4 :

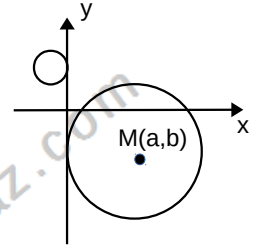
$M(4,-6)$ merkezli ve x eksenine teğet çemberin denklemini yazınız

$$(x-4)^2 + (y+6)^2 = 36$$

Y EKSENİNE TEĞET ÇEMBERLER :

y eksenine teğet çemberlerin yarıçapı

$|a| = r$ dir.



Örnek...5 :

$M(4,-6)$ merkezli ve y eksenine teğet çemberin denklemini yazınız?

$$(x-4)^2 + (y+6)^2 = 16$$

UYARI

Bir çember her iki eksene teğet ise merkezi **1. veya 2. açıortay doğrusu** üzerindedir. (Bu önermenin karşıtı doğru değildir.)

Her iki eksene teğet çemberde $M(a,b)$ merkez ise $|b| = |a| = r$ dir.

Örnek...6 :

$(x+5)^2 + (y-p)^2 = r$ çemberi her iki eksene de teğetse p.r en az kaçtır?

-25

ÇEMBER ANALİTİĞİ

ÇEMBERİN ANALİTİĞİ

Örnek...7 :

Merkezi $3y+x=4$ doğrusu üzerinde bulunan ve her iki eksene teğet olan çemberlerin merkezlerini ve yarıçaplarını bulunuz? Bu çemberler arasındaki en kısa uzaklık kaçtır?

$$M_1 (1,1), M(-2,2), \\ r_1=1, r_2=2, \\ \text{Min. uzak.} = \sqrt{10}-3$$

Örnek...8 :

A(-2,3) noktasından geçen ve iki eksene de teğet olan çemberin yarıçapı kaç olabilir?

$$5 \mp 2\sqrt{3}$$

Örnek...9 :

$3x-4y=0$ ile $4y-3x+15=0$ doğrularına teğet çemberin ve merkezi $y=3$ doğrusu üzerinde olan çemberin denklemi nedir?

$$\left(x - \frac{13}{2}\right)^2 + (y-3)^2 = \frac{9}{4}$$

ÇEMBERİN GENEL DENKLEMİ

$M(a, b)$ merkezli ve r yarıçaplı çemberin denklemi $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ idi.

Bu denklemi açıp düzenlersek

$$x^2 + y^2 - 2.a.x - 2.b.y + a^2 + b^2 - r^2 = 0 \text{ olur.}$$

$$- 2.a=A \quad - 2.b=B \text{ ve } a^2 + b^2 - r^2 = C \text{ diyelim.}$$

$$x^2 + y^2 + A.x + B.y + C = 0$$

Buradan şu eşitlikleri elde ederiz :

$$M(a, b) = M\left(\frac{-A}{2}, \frac{-B}{2}\right) \quad r = \frac{1}{2}\sqrt{A^2 + B^2 - 4.C}$$

$$\Delta = A^2 + B^2 - 4.C \text{ (Delta)}$$

UYARI :

Çember denkleminde yukarıdaki bağıntıların kullanılabilmesi için

- 1) x^2 ve y^2 li terimlerin katsayısı 1 olmalı
- 2) denklemde $x.y$ li terim bulunmamalı
- 3) $\Delta = A^2 + B^2 - 4C > 0$ olmalıdır.

UYARI :

$\Delta = A^2 + B^2 - 4C > 0$ ise bir çember belirtir.

$\Delta = A^2 + B^2 - 4C = 0$ ise bir nokta belirtir.

$\Delta = A^2 + B^2 - 4C < 0$ ise çember belirtmez.

Bunu sanal çember belirtir şeklinde de söyleriz.

Örnek...10 :

$x^2 + y^2 - 6x + 2y - 5 = 0$ çemberinin merkezini ve yarıçapını bulunuz.

$$M(3,1) \quad r = \sqrt{15}$$

Örnek...11 :

$3x^2 + 3y^2 + 12x - 8y - 5 = 0$ çemberinin merkezini bulunuz.

$$M(-2, 4/3)$$

ÇEMBER ANALİTİĞİ

ÇEMBERİN ANALİTİĞİ

Örnek...12 :

$(2m-1)x^2 + (m+1)y^2 - (n-6)x \cdot y + 6nx - n - 9 = 0$ denklemini bir çember belirtiyor ise bu çemberin merkezini ve yarıçapını bulunuz.

$$M(-6,0) \quad \sqrt{41}$$

Örnek...13 :

$(m-2)x^2 + (4-m)y^2 + (n-5)xy + 2mx - ny - mn = 0$ denklemini bir çember belirttiğine göre merkezini ve yarıçapını bulunuz.

$$M(-3, 5/2) \quad r = \frac{11}{2}$$

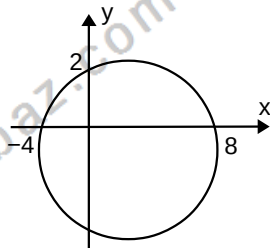
Örnek...14 :

$x^2 + y^2 - 8x + 9y - 20 = 0$ çemberinin x-ekseninden ayırdığı kirişin uzunluğu kaç birimdir?

12

Örnek...15 :

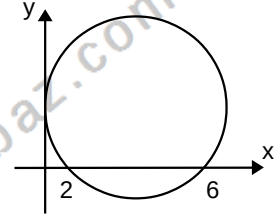
Şekilde verilen çemberin denklemini yazınız.



$$(x-2)^2 + (y+7)^2 = 85$$

Örnek...16 :

Şekilde verilen y-eksenine teğet çemberin denklemini yazınız.

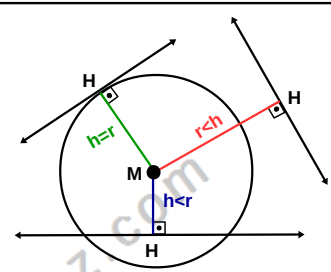


$$(x-4)^2 + (y+2\sqrt{3})^2 = 16$$

ÇEMBER İLE DOĞRUNUN DURUMLARI :

Çember ve doğrunun kesişip kesişmediğine karar verilirken merkezin doğruya uzaklığı ile yarıçap karşılaştırılır:

- Durum 1) $|MH| > r$ doğru çemberi kesmez.
Durum 2) $|MH| = r$ doğru çember teğettir.
Durum 3) $|MH| < r$ doğru çember iki noktada kesişir.



NOT

Çember ve doğrunun kesim noktalarını bulmak için ortak çözüm yaparız.

Örnek...17 :

Analitik düzlemde $(x+3)^2 + y^2 = 5$ çemberi ile $y-2x=p$ doğrusu teğet ise p nin alabileceği değerler toplamı kaçtır?

12

ÇEMBER ANALİTİĞİ

ÇEMBERİN ANALİTİĞİ

Örnek...18 :

Analitik düzlemde $x^2+y^2=r^2$ çemberi ile $3x-4y=10$ doğrusu teğet ise r kaçtır?

2

Örnek...19 :

$(x-3)^2+(y+1)^2=16$ çemberi ile $4x-3y+k=0$ doğrusunun iki noktada kesişmesi için k ne olmalıdır?

$(-35,5)$

Örnek...20 :

$(x+1)^2+(y-1)^2=18$ çemberi ile $y=x-m$ doğrusunun kesişmemesi için m ne olmalıdır?

$m>4$ veya $m<-8$

Örnek...21 :

$x^2-2x+y^2-6y-8=0$ çemberinin x ekseninde ayırdığı kirişin uzunluğu kaç birimdir?

6

Örnek...22 :

$x^2-2x+y^2-4y-11=0$ çemberinin $y=x+1$ doğrusuyla kesim noktaları A ve B olsun. $|AB|$ kaç birimdir?

8

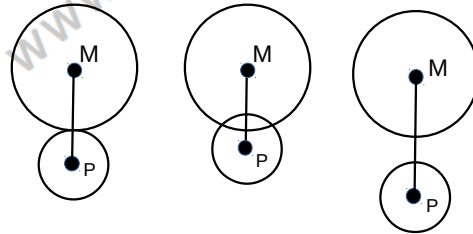
Örnek...23 :

Analitik düzlemde $x^2+y^2=6$ merkezli çemberi ile $y=3x-1$ doğrusunun kesim noktalarının apsileri toplamı kaçtır?

$\frac{3}{5}$

www.matbaz.com

İKİ ÇEMBERİN DURUMLARI



İki çemberin kesişip kesişmediğine karar verilirken merkezler arası doğru ile yarıçap toplamı veya farkı karşılaştırılır.

Durum 1) $|MP|=r_m+r_p$ çemberler dıştan teğet

Durum 2) $|MP|=|r_m-r_p|$ çemberler içten teğet

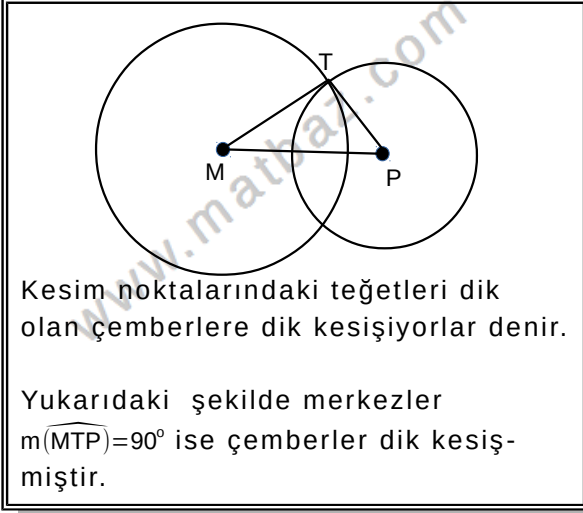
Durum 3) $|r_m-r_p|<|MP|<r_m+r_p$ çemberler iki noktada kesişir.

Durum 4) $|MP|<|r_m-r_p|$ veya $|MP|>r_m+r_p$ çemberler kesişmezler.

ÇEMBER ANALİTİĞİ

ÇEMBERİN ANALİTİĞİ

DİK KESİŞEN ÇEMBERLER



Örnek...24 :

$$(x + 5)^2 + (y - 3)^2 = 225 \text{ ve}$$

$$(x - 7)^2 + (y - k)^2 = 4$$

çemberleri içten teğet ise k kaç olabilir?

-2 veya 8

Örnek...25 :

$$(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 16 \text{ ve}$$

$$(x + 1)^2 + (y - k)^2 = 49$$

çemberleri dıştan teğet ise k değerleri çarpımı kaç olabilir?

-104

Örnek...26 :

$$(x - 3)^2 + y^2 = 16 \text{ ve}$$

$$(x + 1)^2 + (y - m)^2 = 9$$

çemberleri dik kesişmesine göre m değerleri toplamı kaç olabilir?

0

ÇEMBER İLE NOKTANIN DURUMLARI

$O(a,b)$ merkezli ve r yarıçaplı $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ çemberi ile çember ile aynı düzlemde bulunan $P(x_0, y_0)$ noktası için $|OP|^2 - r^2$ değerine P noktasının bu çembere göre kuvveti denir.

$|OP|^2 - r^2 = (x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 - r^2$ olacağından bu hesaplama çember denklemi $F(x,y)=0$ biçimine getirildikten sonra P noktasının koordinatları $F(x,y)$ kısmında yazılarak hesaplanmalıdır.

Durum 1 $F(x_0, y_0)=0$ P noktası çemberin üzerindedir

Durum 2 $F(x_0, y_0)>0$ P noktası çemberin dışındadır

Durum 3 $F(x_0, y_0)<0$ P noktası çemberin içindedir

Not 1: $F(x_0, y_0)>0$ ise bu hesaplama sonucu bulunan pozitif sayı çembere P noktasından çizilen teğet uzunluğunun karesidir.

Not 2: Negatif kuvvetin mutlak değeri ise bu noktada ile iki parçaya ayrılan kiriş parçalarının sabit olan çarpım değeridir.

Örnek...27 :

$P(6, 4)$ noktasından $x^2 + y^2 - 4x - 5y + 20 = 0$ çemberine göre kuvvetini bulup kuvveti yorumlayınız.

Nokta çemberin dışında,
 P den çizilen teğet $2\sqrt{7}$

Örnek...28 :

$P(2, -3)$ noktasından $x^2 + y^2 - 3x - 5y + k = 0$ çemberine çizilen teğetin değme noktası T ve $IPTI=7$ ise $k=?$

27

ÇEMBER ANALİTİĞİ

ÇEMBERİN ANALİTİĞİ

Örnek...29 :

A(-1, 2) noktasından geçen bir doğru $(x + 4)^2 + (y - 5)^2 = 12$ çemberini K ve L noktalarında kesiyor. $|AK| \cdot |AL|$ çarpımı kaçtır?

6

Örnek...30 :

$(x - 5)^2 + (y + 2)^2 = 41$ çemberinin (1,2) noktasından geçen en kısa kirişinin uzunluğu kaç birimdir?

6

Örnek...31 :

$(x + 3)^2 + y^2 = 34$ çemberine (2,-3) noktasından çizilen teğetin denklemi nedir?

$$5x - 3y - 19 = 0$$

Örnek...32 :

$x^2 + y^2 + 4x - 2y = 4$ çemberinin A(1,1) noktasından çizilen teğetin ve normalinin denklemi nedir?

$$y = 1, x = 1$$

Örnek...33 :

$(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 25$ çemberinin A(-2,-4) noktasından geçen teğetin denklemini bulunuz?

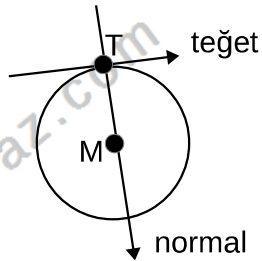
$$x = -2$$

TEĞET VE NORMAL DENKLEMLERİ :

$x^2 + y^2 = r^2$ çemberine üzerindeki $T(x_0, y_0)$ noktasından çizilen teğetin denklemi $x \cdot x_0 + y \cdot y_0 = r^2$ dir.

$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ çemberine üzerindeki

$T(x_0, y_0)$ noktasından çizilen teğetin denklemi $(x_0 - a)(x - a) + (y_0 - b)(y - b) = r^2$ dir.



ÇEMBER ANALİTİĞİ

ÇEMBERİN ANALİTİĞİ

Ekstra Bölümler

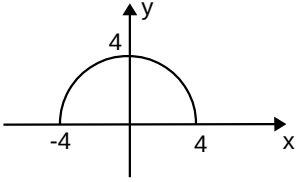
YARIM ÇEMBER DENKLEMLERİ :

$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ çember denkleminde x ve y yalnız bırakılırsa

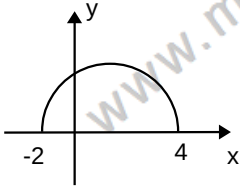
$y = b \pm \sqrt{r^2 - (x - a)^2}$ ve $x = a \pm \sqrt{r^2 - (y - b)^2}$ olarak elde edilir.

Örnek...34 :

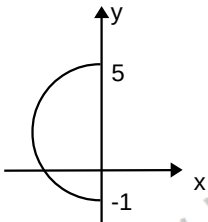
Şekildeki yarım çemberlerin denklemini yazınız.



$$y = \sqrt{16 - x^2}$$



$$y = \sqrt{9 - (x - 1)^2}$$



$$x = -\sqrt{9 - (y - 2)^2}$$

Örnek...35 :

$y = 8 - \sqrt{4 - (x - 6)^2}$ ve $x = -3 + \sqrt{4 - (y + 2)^2}$ yarım çemberlerini çiziniz.

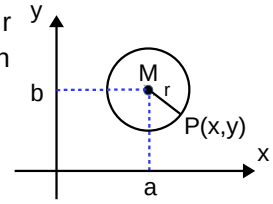
ÇEMBERİN PARAMETRİK DENKLEMİ :

$M(a, b)$ ve yarıçapı r birim olan çemberin parametrik denklemleri

$$x = a + r \cdot \cos \theta$$

$$y = b + r \cdot \sin \theta$$

şeklinde yazılır.



Örnek...36 :

$x = 2 + 4 \cdot \cos \theta$ ve $y = -3 + 4 \cdot \sin \theta$ parametrik denklemleri ile verilen çemberin merkezi ve yarıçapı nedir?

$$M(2, -3) \quad r = 4$$

Örnek...37 :

$P(24, -7)$ noktasından geçen merkezli çemberin parametrik denklemini yazınız.

$$x = 25 \cdot \cos t,$$

$$y = 25 \cdot \sin t$$

ÇEMBER ANALİTİĞİ

ÇEMBERİN ANALİTİĞİ

Örnek...38 :

$x^2 + y^2 = 92$ denklemi ile verilen çemberin parametrik denkleminden yararlanarak $\theta = \frac{5\pi}{6}$ parametresinin belirttiği noktayı bulunuz.

$$\left(\frac{-9\sqrt{3}}{2}, \frac{9}{2}\right)$$

Örnek...39 :

$x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0$ denklemiyle verilen çemberinin parametrik denklemini yazınız.

$$\begin{aligned}x &= 3 + 5\cos t, \\y &= -2 + 5\sin t\end{aligned}$$

Örnek...40 :

$\|\overline{MP}\| = 3$ denklemi ile verilen çemberin merkezi $M(2, -5)$ olduğuna göre, standart denklemini yazınız.

$$(x-2)^2 + (y+5)^2 = 9$$

Örnek...41 :

$\|\overline{MP}\| = 2\sqrt{3}$ denklemi ile verilen çemberin merkezi $M(2, -1)$ ve üzerindeki bir nokta $(3, x)$ olduğuna göre, x' in alacağı değerler çarpımı kaçtır?

-10

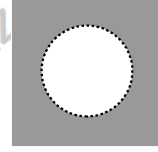
ÇEMBERİN DÜZLEMDE AYIRDIĞI BÖLGELER

$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ çemberi, düzlemi iki bölgeye ayırır.



İÇ BÖLGE

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 < r^2$$



DIŞ BÖLGE

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 > r^2$$

Örnek...42 :

$C(k+1, -2)$ noktasının $x^2 + y^2 - 5x + 4y - 2 = 0$ çemberinin içinde olması için k ' nın alacağı tam sayı değerleri toplamı kaçtır?

9

Örnek...43 :

$x^2 + y^2 - 16 \leq 0 < y - x - 4$ eşitsizliğini gerçekleyen noktaların oluşturduğu bölgeyi analitik düzlemde çiziniz.

ÇEMBER ANALİTİĞİ

ÇEMBERİN ANALİTİĞİ

DEĞERLENDİRME

- 1) $(3x - 8)^2 + (3y + 1)^2 = 36$ çemberinin merkez ve yarıçapını bulunuz.

$$M(8/3, -1/3), r=2$$

- 2) $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 36$ çemberi üzerindeki hangi nokta $A(-1,1)$ noktasına en yakındır?

- 3) $A(2, -1)$ noktası $x^2 + y^2 - 3x + 4y + 1 = 0$ çemberinin neresindedir?

- 4) $B(-2, 1)$ noktası $x^2 + y^2 - (m+1).x + 4y + 1 = 0$ çemberinin dışında olduğuna göre m 'nin alacağı en küçük tam sayı değeri kaçtır?

- 5) $A(3, 12)$ noktasına uzaklığı $B(-5, 1)$ noktasına uzaklığının yarısı olan noktaların geometrik yerini bulunuz.

- 6) $A(4, 2)$ noktasının $2x - m.y + 3m + 8 = 0$ doğrularına göre simetrilerinin geometrik yerini bulunuz.

- 7) Verilen bir A noktasının verilen bir S noktasından geçen doğrulara göre simetrikleri ne belirtir?

- 8) $(x - 4)^2 + (y + 5)^2 = 40$ çemberi içindeki $P(2, -2)$ noktasından geçen kirişlerin orta noktalarının geometrik yer denklemini yazınız.