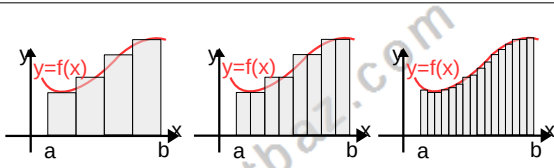


# İNTEGRAL

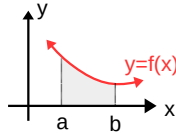
## İNTEGRAL HESABI-ALAN HESABI

### İNTEGRAL İLE ALAN HESABI



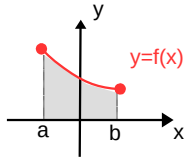
Şekilde  $y=f(x)$  eğrisiyle  $x$  eksenine altında kalan alanı bulmak için eğrinin altında kalan bölgeyi dikdörtgenlere ayırır ve bu alanları toplayarak bir Riemann toplamı elde ederiz. Elde edilen Riemann toplamına integral hesabının temel teoremini uygulayarak aşağıdaki sonuçları çıkarırız

### ALAN HESABI



$f:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$  süreklili  $f$  fonksiyonu ile  $x=a$ ,  $x=b$  ve  $Ox$  eksenine arasında kalan bölgenin alanı  $\int_a^b |f(x)| dx$  ile hesaplanır.

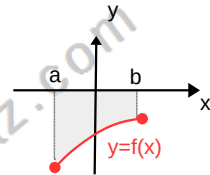
Taralı alan  $\int_a^b f(x) dx$



### UYARI 1

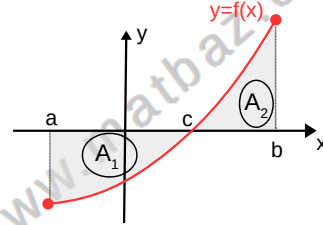
Not  $f(x) < 0$  ise

Taralı alan  $-\int_a^b |f(x)| dx$



### UYARI 2

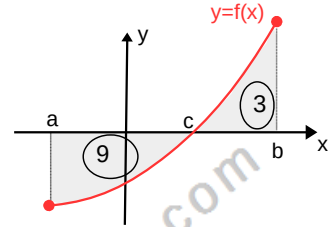
$[a,b]$  aralığında  $f(x)$  işaret değiştiriyorsa, fonksiyon parçalara ayrılır.



Taralı toplam alan  $= A_1 + A_2$   
 $= \int_a^b |f(x)| dx = -\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$

### UYARI 3

Şekildeki taralı bölgelerin alanları verilmiştir



Soru 1  $\int_a^b f(x) dx = ?$

İstenen alanların işaretli (cebirel) toplamı olup cevap  $-9+3=-6$  olur

Soru 2  $[a,b]$  aralığında  $Ox$  eksenine ve  $y=f(x)$  eğrisiyle sınırlı alan kaç  $br^2$  dir?

İstenen toplam alanlar olup integralle ifadesi  $\int_a^b |f(x)| dx$  ve eşiti  $9+3=12$  olur

Alan sorularını çözmek için uygun şekli çizeriz, gerekirse integralleri parçalar ve uygun aralıklarda integralleri hesaplarız

### Örnek...1 :

$y=x+3$  doğrusu  $x=-1$ ,  $x=2$  doğruları ve  $x$  eksenine arasında kalan alan kaç  $br^2$  dir?

$\frac{21}{2}$

## İNTEGRAL

### İNTEGRAL HESABI-ALAN HESABI

#### Örnek...2 :

$y = x^2$  parabolü,  $y = 0$  ve  $x = 2$  doğrularının sınırladığı kapalı bölgenin alanı kaç  $br^2$  ?

$\frac{8}{3}$

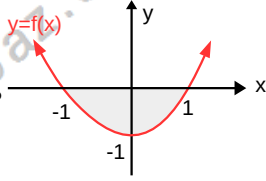
#### Örnek...3 :

$y = 3 - \frac{x^2}{3}$  eğrisi ile  $ox$  eksenini arasında kalan kapalı bölgenin alanı kaç  $br^2$  dir?

12

#### Örnek...4 :

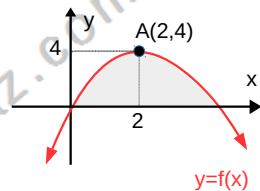
Şekildeki  $y=f(x)$  parabolü ve  $x$  eksenini arasında kalan taralı alan kaç birim karedir?



$\frac{4}{3}$

#### Örnek...5 :

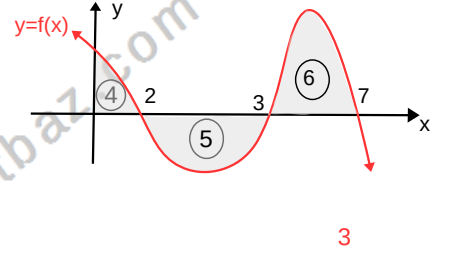
Şekildeki tepe noktası A olan  $y=f(x)$  parabolü ile  $x$  eksenini arasında kalan alan kaç birim karedir?



$\frac{32}{3}$

#### Örnek...6 :

Grafiği verilen  $y=f(x)$  fonksiyonu için  $\int_0^2 x \cdot f(x^2+3) dx = ?$



#### Örnek...7 :

$y = 9x - x^2$  eğrisi  $x = -1$  ve  $x=1$  doğruları ve  $ox$  eksenini arasında kalan bölgenin alanı kaç  $br^2$  dir.

9

#### Örnek...8 :

$y = x^2$ ,  $y = \frac{8}{x}$  ve  $x=5$  doğrusu ve  $x$  eksenini arasında kalan alanı hesaplayınız

$\frac{8}{3} + \frac{8 \ln 5}{2}$

# İNTEGRAL

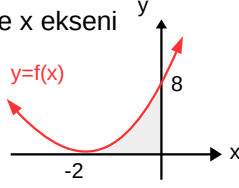
## İNTEGRAL HESABI-ALAN HESABI

### DEĞERLENDİRME 1

- 1)  $y=x+1$  doğrusu  $x=0$ ,  $x=3$  doğruları ve  $x$  eksenini arasında kalan alan kaç br2 dir?

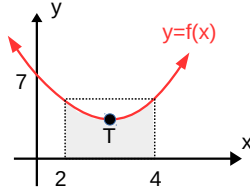
$\frac{15}{2}$

- 2) Şekildeki  $y=f(x)$  parabolü ve  $x$  eksenini arasında kalan alan kaç birim karedir?



$\frac{16}{3}$

- 3) Şekildeki tepe noktası  $T(r,6)$  olan  $y=f(x)$  parabolü ile  $x=2$  ve  $x=4$  ve  $x$  eksenini arasında kalan alan kaç birim karedir?

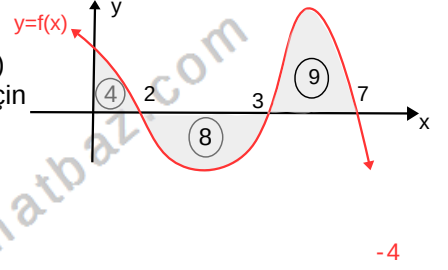


$12\frac{2}{27}$

- 4)  $y = 4 - x^2$  eğrisi  $x = 1$  ve  $x=3$  doğruları ve  $Ox$  eksenini arasında kalan bölgenin alanı kaç br2 dir

4

- 5) Grafiği verilen  $y=f(x)$  fonksiyonu için  $\int_0^2 x \cdot f'(x) dx$



- 6)  $y=x^2-2x$  parabolü  $x=1$  ve  $x=5$  doğruları ve  $x$  eksenini arasında kalan alanı hesaplayınız.

$\frac{56}{3}$

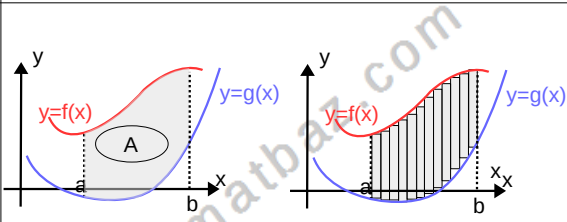
- 7)  $y = \frac{5}{x}$ ,  $x=e$  ve  $x=e^{19}$  doğruları ve  $x$  eksenini arasında kalan alanı hesaplayınız

90

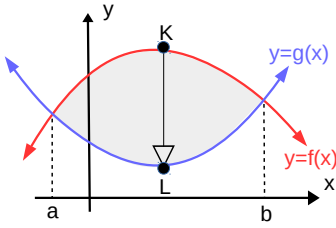
# İNTEGRAL

## İNTEGRAL HESABI-ALAN HESABI

### İKİ EĞRİ ARASINDA KALAN ALAN



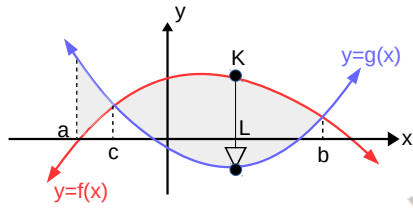
İki eğri arası alan bulunurken grafikler arasındaki alan yine dikdörtgenlere bölünerek alan Riemann toplamına dönüştürülür.



Genel olarak eğriler arasındaki alanı bulmak için grafikler çizildikten sonra Oy eksenine paralel KL şeridi çizilir. Bu şeridi kendisine paralel olarak kaydırarak bölgeyi taradığımızda üst ve hep  $y = f(x)$  eğrisi üzerinde alt ucu da hep  $g(x)$  eğrisi üzerinde değişmesi gerekir. Şekli inceleyiniz

Bu durumda alan  $A = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$  olur.

Aksi takdirde integrali parçalamak gerekir



Taralı alanlar toplamı  
$$\int_a^b |f(x) - g(x)| dx = \int_a^c (f(x) - g(x)) dx + \int_c^b (g(x) - f(x)) dx$$

### Örnek...9 :

$y = x^2$  eğrisi ile  $y = x + 12$  doğrusu arasında kalan kapalı bölgenin alanı kaç  $br^2$  dir?

$\frac{343}{6}$

### Örnek...10 :

$y = x^2 - 14$  ve  $y = 4 - x^2$  parabolleri arasında kalan kapalı bölgenin alanı kaç  $br^2$  dir

72

### Örnek...11 :

$y = x^2$  ve  $y = x^4$  eğrileri arasında kalan alanı bulunuz.

$\frac{4}{15}$

## İNTEGRAL

### İNTEGRAL HESABI-ALAN HESABI

#### Örnek...12 :

$y=x^3$  ve bu eğriye  $x=1$  de çizilen teğeti arasında kalan bölgenin alanını

$$\frac{27}{4}$$

#### Örnek...13 :

$y= \sqrt{x}$  ve  $y=x-2$  doğrusu ve  $x$  eksenini arasında kalan alanı bulunuz.

$$\frac{18-2\sqrt{2}}{3}$$

#### Örnek...14 :

$\int_0^4 \sqrt{16-x^2} dx$  integralini hesaplayınız.

$$4\pi$$

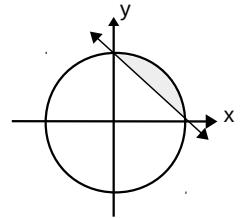
#### Örnek...15 :

$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} (\sqrt{1-x^2}-x) dx$

$$\frac{\pi}{8}$$

#### Örnek...16 :

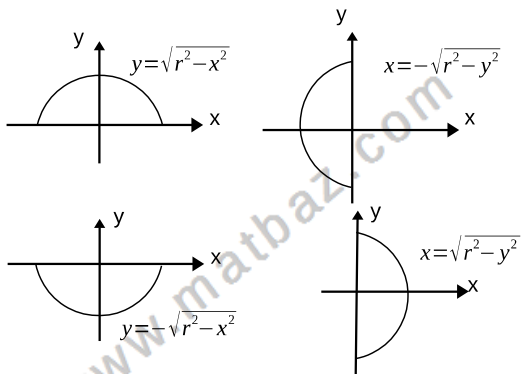
Şekildeki merkezli dairenin çapı 12 birimdir. taralı alanı integrale ifade ediniz



$$\int_0^6 (\sqrt{36-x^2}-6+x) dx$$

#### Hatırlatma

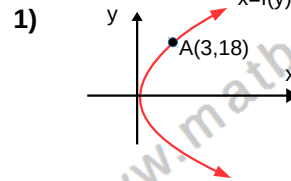
Standart çember denklemini kullanarak aşağıdaki bağıntıları elde ederiz



#### X=F(Y) VE Y EKSENİYLE SINIRLANDIRILMIŞ ALANLAR

#### Örnek...1 :

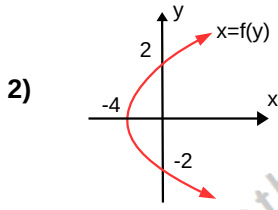
$x=f(y)$  fonksiyonları parabol denklemlerini yazınız



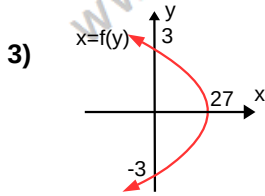
$$x = \frac{y^2}{108}$$

# İNTEGRAL

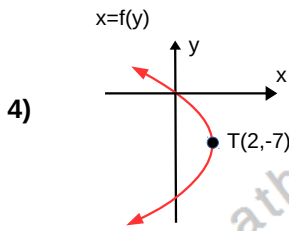
## İNTEGRAL HESABI-ALAN HESABI



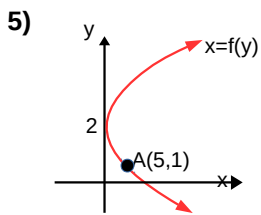
$$x = \frac{y^2}{4}$$



$$x = -3y^2 + 27$$



$$x = \frac{-2}{49}(y^2 + 14y)$$



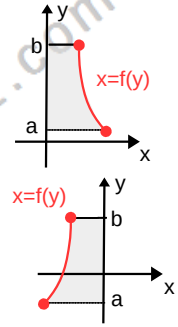
$$x = 5(y-2)^2$$

## Y EKSENİNDE ALAN HESABI

$$\text{Taralı alan} = \int_a^b f(y) dy$$

UYARI 1  
Not  $x=f(y) < 0$  ise

$$\text{taralı alan} = - \int_a^b f(y) dy$$

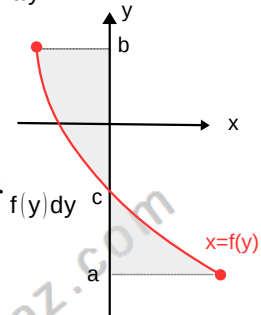


## UYARI 2

[a,b] aralığında  $f(y)$  işaret değiştiriyorsa, fonksiyon parçalara ayrılır

Taralı toplam alan

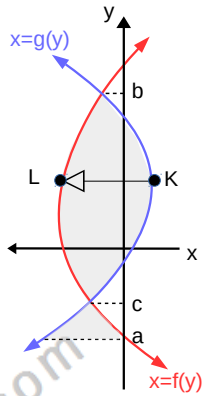
$$= \int_a^b |f(y)| dy = \int_a^c f(y) dy - \int_c^b f(y) dy$$



## İKİ EĞRİ ARASINDA KALAN ALAN

$$\text{taralı alan} = \int_a^b |g(y) - f(y)| dy$$

$$\int_a^c (f(y) - g(y)) dy + \int_c^b (g(y) - f(y)) dy$$



## UYARI

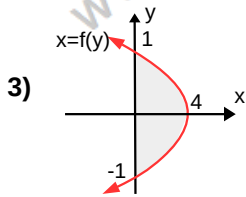
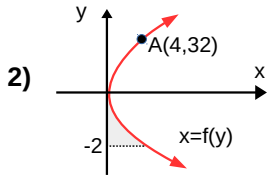
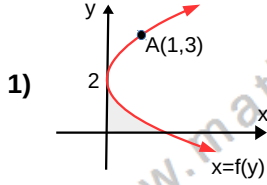
$y=f(x)$  eğrisi verilip  $y$  eksenini ile sınırlı bölgenin alanı sorulduğunda sıklıkla verilen fonksiyonun tersiyle işlem yaparız.

# İNTEGRAL

## İNTEGRAL HESABI-ALAN HESABI

### Örnek...2 :

Verilen parabol ve y eksenine sınırlanmış taralı alanı bulunuz



### Örnek...3 :

$y=e^x$  eğrisi  $y=1$ ,  $y=e$  ve y eksenini arasında kalan alan kaç birim karedir?

### Örnek...4 :

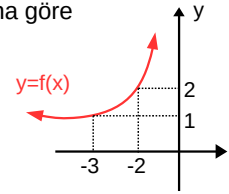
$y = \ln x$  eğrisi,  $y = 1$  ve  $y = 3$  doğruları ve Oy eksenini arasında kalan kapalı bölgenin alanı kaç  $\text{br}^2$  dir?

$e^3 - e$

### Örnek...5 :

Grafiği verilen  $y=f(x)$  fonksiyonuna göre

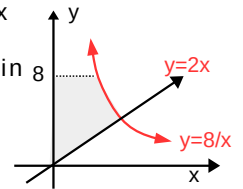
$$\int_{-3}^{-2} f(x) dx + \int_1^2 f^{-1}(x) dx \text{ kaçtır?}$$



-1

### Örnek...6 :

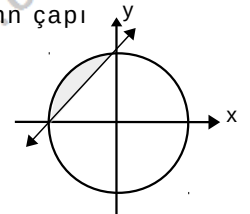
Grafiği verilen  $y=2x$  ve  $y=8/x$  fonksiyonları ve y eksenini arasında kalan taralı bölgenin alanı kaç birim karedir?



$4 + 8 \ln 2$

### Örnek...7 :

Şekildeki merkezli dairenin çapı 14 birimse taralı alanı integrale ifade ediniz



$$\int_{-7}^0 (\sqrt{49-x^2} - x - 7) dx$$

$\frac{8}{3}$

$\frac{1}{96}$

$\frac{16}{3}$

1

## İNTEGRAL

### İNTEGRAL HESABI-ALAN HESABI

#### DEĞERLENDİRME 2

- 1)  $y=x^2$  veya  $y=2x+8$  doğrusu arasında kalan alanı bulunuz.

36

- 2)  $y=x^2$  veya  $y=4x-x^2$  arasında kalan alanı bulunuz.

$\frac{32}{3}$

- 3)  $y=x^3$  veya  $y=x^4$  arasında kalan alanı bulunuz.

$\frac{1}{20}$

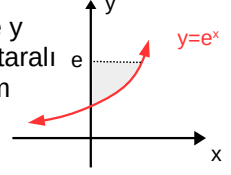
- 4)  $f(x)=x^2$  ve  $g(x)=(x-2)^2$  ile x eksenini arasında sınırlı bölgenin alanı kaç br<sup>2</sup> dir.

$\frac{2}{3}$

- 5)  $\int_{-2}^2 \sqrt{4-x^2} dx = ?$

$2\pi$

- 6)  $y=e^x$  fonksiyonu  $y=e$  ile y eksenini arasında kalan taralı bölgenin alanı kaç birim karedir?

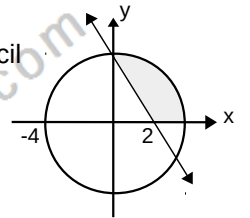


1

- 7)  $x = -y^2 + 6$  parabolü ile  $x = y$  doğrusu tarafından sınırlanan kapalı bölgenin alanı kaç br<sup>2</sup> dir?

$\frac{125}{6}$

- 8) Şekilde doğru ile merkezli daire arasındaki taralı bölgenin alanını integralle ifade ediniz



$$\int_{-7}^0 \left( \sqrt{16-y^2} - 2 + \frac{y}{2} \right) dy$$



## İNTEGRAL

### İNTEGRAL HESABI-ALAN HESABI

- 9)  $y = \frac{27}{x}$  ve  $y = x^2$  eğrileri ve  $y = 16$  doğrusu arasında sınırlı bölgenin alanı kaç birim karedir?

$$\frac{74}{3} + 54 \ln\left(\frac{3}{4}\right)$$

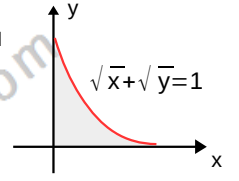
- 10)  $y = -x^2 + x + 6$  ile  $y = x + 2$  doğrusu arasında kalan alanı bulunuz.

$$\frac{32}{3}$$

- 11)  $y = x^3$  fonksiyonu  $x = 1$  noktasındaki normali ve  $x = 0$  doğrusu ile sınırlanmış bölgenin alanı kaç birim karedir?

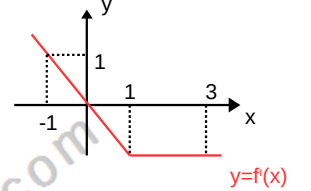
$$\frac{11}{12}$$

- 12)  $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$  bağıntısıyla birinci bölgede sınırlı bölgenin alanı kaç birim karedir?



$$\frac{1}{6}$$

- 13) Şekilde  $y = f(x)$  fonksiyonunun türevinin grafiği verilmiştir.  $f(0) = 3$  ise  $f(3)$  kaçtır?



$$\frac{1}{2}$$

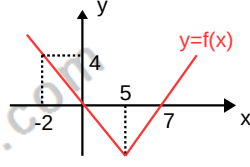
- 14)  $f(x) = \sqrt{x-2}$ ,  $g(x) = x^2 + 2$  fonksiyonları ve  $x = 18$  ile  $y = 18$  doğruları ve eksenler arasında kalan bölgenin alanı kaç birim karedir?

$$\frac{716}{3}$$

## İNTEGRAL

### İNTEGRAL HESABI-ALAN HESABI

- 15) Şekilde  $y=f(x)$  fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Buna göre  $\int_{-2}^7 |f'(x)| dx$  kaçtır?



24

- 16)  $x=y^2$  parabolü ile  $x=0$  ve  $y=2$  doğruları arasında kalan bölgenin alanı kaç  $br^2$  dir?

3/8

www.matbaz.com

- 17)  $y=e^x$  eğrisi ile  $y=6$  doğrusu ve oy eksenini arasında kalan kapalı bölgenin alanı kaç  $br^2$  dir?

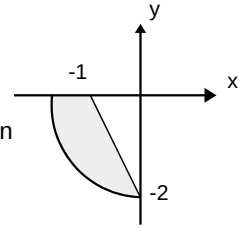
$6 \ln 6 - 5$

- 18)  $x=y^2-4$  ile  $y=3$  doğrusu ve  $y$  eksenini ile düzlemin 1. bölgesinde sınırlanmış bölgenin alanı kaç birim karedir?

$\frac{7}{3}$

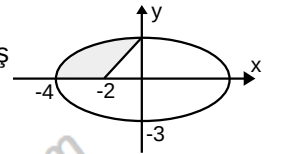
- 19)

Şekilde merkezi orjin olan dörtte bir çember yayı veriliyor. Doğru ile daire arasında kalan taralı bölgenin alanını integrale ifade ediniz



$$\int_{-2}^0 \left( \sqrt{4-y^2} - 1 - \frac{y}{2} \right) dy$$

- 20) Şekildeki merkezli elips ve doğru ile sınırlanmış bölgeyi integrale ifade ediniz.



$3\pi - 3$