

İNTEGRAL 6

BELİRLİ İNTEGRAL

BELİRLİ İNTEGRAL KURALLARI

$$1. \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

$$2. \int_a^a f(x) dx = 0$$

$$3. \int_a^b k \cdot f(x) dx = k \cdot \int_a^b f(x) dx$$

$$4. \int_a^b (f(x) \pm g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$$

$$5. \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx, \quad c < b$$

$$6. (b-a) \cdot \min(f(x)) < \int_a^b f(x) dx = 0 < (b-a) \cdot \max(f(x))$$

7. $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon ve $\frac{d}{dx}(F(x)) = f(x)$ ise $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$ olur.

Örnek...1 :

$$\int_2^3 f(x) dx = 4 \text{ ve } \int_3^7 f(x) dx = 9 \text{ ise } \int_2^7 f(x) dx = ?$$

-13

Örnek...2 :

Uygun koşullarda $\int_2^5 f(x) dx = 4$ ve $\int_4^7 f(x) dx = 9$ ve $\int_2^7 f(x) = 21$ ise $\int_4^5 f(x) = ?$

-8

Örnek...3 :

$$\int_1^2 x dx = ?$$

$\frac{3}{2}$

Örnek...4 :

$$\int_{-1}^0 (x^3 + 5x^2 - 7x + 4) dx = ?$$

$\frac{107}{12}$

Örnek...5 :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = ?$$

1

Örnek...6 :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \cos x dx = ?$$

$\frac{1}{2}$

Örnek...7 :

$$\int_0^2 \left(3x^2 + \frac{x}{3} \right) dx = ?$$

$\frac{23}{3}$

Örnek...8 :

$$\int_{\ln 1}^{\ln 2} (e^{2x} + e^x) dx = ?$$

$\frac{5}{2}$

İNTEGRAL 6

BELİRLİ İNTEGRAL

UYARI

Değişken değiştirme yapıldığında yeni değişkene göre sınırlar tekrar hesaplanırsa eski değişkene dönüşmeden integral hesaplanabilir.

Örnek...9 :

$$\int_2^3 (x-2)^2 dx = ?$$

$\frac{1}{3}$

Örnek...10 :

$$\int_1^e \frac{(\ln x)^2}{x} dx = ?$$

$\frac{1}{3}$

Örnek...11 :

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^2 x \cdot \cos x dx = ?$$

$-\frac{1}{3}$

Örnek...12 :

$$\int_0^1 (x^2+5x+1)^2(2x+5) dx = ?$$

$\frac{342}{3}$

Örnek...13 :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \cos x dx = ?$$

$\frac{\pi}{2} - 1$

Örnek...14 :

$$\int_1^e \log x dx = ?$$

loge

Örnek...15 :

$$\int_{-2}^2 x^5 + x^3 dx = ?$$

0

Örnek...16 :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin x} \cdot \cos x dx = ?$$

$\frac{2}{3}$

Örnek...17 :

$$\int_{-3}^3 \frac{x^{15}}{1+x^4} dx = ?$$

0

İNTEGRAL 6

BELİRLİ İNTEGRAL

Örnek...18 :

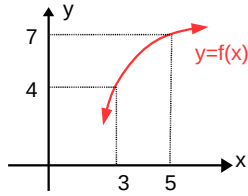
$$\int_0^1 x \cdot \ln(x^2+1) dx = ?$$

$$\ln\left(\frac{2}{\sqrt{e}}\right)$$

Örnek...19 :

Grafiği verilen $y=f(x)$ fonksiyonunun grafiğine

göre $\int_3^5 (f(x)+x \cdot f'(x)) dx = ?$



23

Örnek...20 :

$$\int_2^3 f(x) dx = 5 \text{ ise } \int_2^3 (7-f(x)) dx = ?$$

2

Örnek...21 :

$$\int_0^2 f(4x) dx = 60 \text{ ise } \int_0^8 (1-f(x)) dx = ?$$

-176

Örnek...22 :

$$\int_{e^5}^{e^2} \frac{f(\ln x)}{x} dx = 3 \text{ ise } \int_1^2 x \cdot f(x^2+1) dx = ?$$

-3

Örnek...23 :

$\int_0^4 \sqrt{16-x^2} dx$ integralinde $x=4\sin t$ dönüşümü yaparak tekrar integrali yazınız

$$16 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt$$

Örnek...24 :

$\int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{2+e^{2x}} dx$ integralinde $u=e^x$ dönüşümü yaparak tekrar integrali yazınız

$$\int_1^2 \frac{du}{2+u^2}$$

Örnek...25 :

$\int_1^{256} \frac{\sqrt[6]{x}-\sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x}} dx$ integralinde $x=u^{12}$ dönüşümü yaparak tekrar integrali yazınız ($u>0$)

$$12 \cdot \int_1^{\sqrt[3]{4}} (u^{10}-u^{12}) du$$

İNTEGRAL 6

BELİRLİ İNTEGRAL

Örnek...26 :

A(3,2) noktasında yerel maksimum ,B(-2,3) noktasında yerel minimuma sahip $y=f(x)$

fonksiyonu için $\int_{-2}^3 x \cdot f''(x) dx$ değerini bulunuz

1

Örnek...27 :

$y=f(x)$ fonksiyonu reel sayılarda türevli ve $x=2$ noktasındaki teğeti x eksenine pozitif yönde 45° lik açı yapıyorsa ve $x=3$ ekstremum noktalarından birinin apisi ise

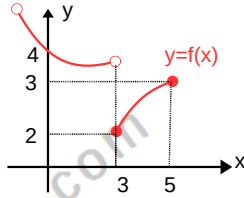
$$\int_2^3 \frac{x \cdot f''(x) - f'(x)}{x^2} dx = ?$$

$-\frac{1}{2}$

Örnek...28 :

$y=f(x)$ fonksiyonunun grafiği şekildeki gibidir

$$\int_3^5 f(x) + x \cdot f'(x) dx = ?$$



9

Örnek...29 :

$\int_0^t (x^2 - 4x - 5) dx$ integralinin alacağı sonuç en küçük değer kaçtır?

$$\frac{-55}{3}$$

ÖZEL TANIMLI FONKSİYONLARIN İNTEGRALİ

İntegrandında parçalı fonksiyon veya mutlak değerli fonksiyon içeren integraller integralin alındığı sınırlar içerisinde kritik nokta içeriyorsa göre parçalanarak integralleri alınır.

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığındaki bulunan sonlu sayıdaki $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ sayıları için süreksiz ise bu noktalara göre integral parçalanır.

$$\text{Yani } \int_a^b f(x) dx = \int_a^{a_1} f(x) dx + \int_{a_1}^{a_2} f(x) dx + \dots + \int_{a_{n-1}}^{a_n} f(x) dx$$

Bu parçalamayı genelde parçalı fonksiyonda veya mutlak değerli fonksiyonun kritik noktasında ihtiyaç duyarsak yaparız

Örnek...30 :

$$f(x) = \begin{cases} e^{x^2} & x \geq 0 \\ x & x < 0 \end{cases} \text{ ise } \int_{-4}^{-2} f(x) dx$$

-6

İNTEGRAL 6

BELİRLİ İNTEGRAL

Örnek...31 :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x < 2 \\ x^3 & 2 < x < 3 \\ x+1 & x \geq 3 \end{cases} \text{ fonksiyonu için } \int_0^5 f(x) dx$$

9

Örnek...32 :

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & x \geq 0 \\ 3x^2 & x < 0 \end{cases} \text{ ise } \int_{-1}^3 f(x) dx$$

13

Örnek...33 :

$$f(x) = \begin{cases} 2^x & x \geq 0 \\ x+1 & x < 0 \end{cases} \text{ ise } \int_{-3}^1 f(x+2) dx$$

$\frac{1}{2} + \frac{7}{\ln 2}$

Örnek...34 :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln x}{x} & x \geq e \\ e^x & x < e \end{cases} \text{ ise } \int_1^{e^2} f(x) dx$$

$e^e - e + \frac{3}{2}$

Örnek...35 :

$$\int_0^4 |x+2| dx$$

16

Örnek...36 :

$$\int_0^2 x^3 |x-1| dx$$

2,5

Örnek...37 :

$$\int_{-1}^1 (2x-3)|x| dx$$

3

Örnek...38 :

$$\int_0^{\pi} |\cos x| dx$$

2

Örnek...39 :

$$\int_0^{\pi} |\cos x - \sin x| dx$$

$2\sqrt{2}$

İNTEGRAL 6

BELİRLİ İNTEGRAL

Örnek...40 :

$$\int_{\pi}^{2\pi} \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}} dx$$

Örnek...41 :

$$\int_0^1 \frac{x^2-4}{|x-2|} dx$$

Örnek...42 :

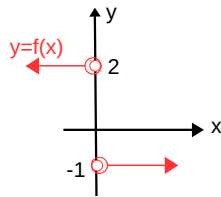
$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} (|\sin x| + \cos |x|) dx$$

Örnek...43 :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left| \sin x - \frac{\sqrt{2}}{2} \right| dx$$

Örnek...44 :

Reel sayılarda sürekli olan f fonksiyonunun türevinin grafiği veriliyor. $f(3)-f(2)=?$



İNTEGRAL HESABIN TEMEL TEOREMİ

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon ve $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ ise $\frac{d(F(x))}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\int_a^x f(t) dt \right) = f(x)$ yani sürekli her fonksiyon başka bir fonksiyonun türevidir. Başka bir deyişle türev ve integral işlemleri birbirlerinin tersi işlemlerdir.

Örnek...45 :

$$\frac{d}{dx} \left(\int_a^x \sin t dt \right) = ?$$

$\sin x$

Örnek...46 :

$$\frac{d}{dx} \left(\int_{-2}^x \frac{1}{t^2+1} dt \right) = ?$$

$\frac{1}{x^2+1}$

Örnek...47 :

$$\frac{d}{dx} \left(\int_{\sqrt{7}}^x \tan t dt \right) = ?$$

$\tan x$

GENELLEME (LEİBNİZ KURALI)

$F(x) = \int_{v(x)}^{u(x)} f(t) dt$ olarak verilsin

$$\frac{d(F(x))}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\int_{v(x)}^{u(x)} f(t) dt \right) = f(u(x)) \cdot u'(x) - f(v(x)) \cdot v'(x)$$

Örnek...48 :

$$\frac{d}{dx} \left(\int_{\sin x}^{\cos x} t^2 + t dt \right) = ?$$

$\sin 2x \frac{(\sin x - \cos x)}{2}$

İNTEGRAL 6

BELİRLİ İNTEGRAL

Örnek...49 :

$$\frac{d}{dx} \left(\int_x^{x^2} \tan t \, dt \right) = ?$$

$$2x \cdot \tan x^2 - \tan x$$

Örnek...50 :

$$\frac{d}{dx} \left(\int_e^x \frac{\sin t}{t} \right) = ?$$

$$0$$

Örnek...51 :

$F(x) = \int_{x+1}^{x^2+1} e^t \, dt$ fonksiyonun $x=1$ noktasındaki teğet denklemini bulunuz

$$y = e^2(x-1)$$

Örnek...52 :

$F(x) = \int_{x+2}^{x^2} t^2 \, dt$ fonksiyonun x dönüm noktasının apsisini bulunuz

$$\pm \frac{1}{\sqrt{6}}$$

Örnek...53 :

$F(x) = \int_0^x t \cdot e^t \, dt$ ise $F'(1)$ kaçtır?

$$e$$

DEĞERLENDİRME

1) $\int_2^3 f(x) \, dx = 10$ ve $\int_2^3 g(x) \, dx = 8$ ise

$$\left(\int_2^3 (4 \cdot f(x) + 3g(x)) \, dx \right) \cdot \left(\int_2^3 (5 \cdot f(x) - 4g(x)) \, dx \right)$$

2) $\int_1^2 f(x) \, dx = 6$ ve $\int_1^2 (5 - 3 \cdot f(x)) \, dx = ?$

3) $\int_1^2 \left(\sum_{n=0}^2 \frac{x^n}{n!} \right) = ?$

4) $\int_0^1 \frac{4}{x^2 - 4} \, dx = ?$

İNTEGRAL 6

BELİRLİ İNTEGRAL

$$5) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2x \cos x \, dx = ?$$

$$6) \int_1^2 (3x^2 + 3^x) \, dx = ?$$

$$7) \int_{\ln 2}^{\ln 4} e^{-x} \, dx = ?$$

$$8) \int_{-3}^{-4} \frac{1}{(x+5)^4} \, dx = ?$$

$$9) \int_1^2 \frac{1}{x \cdot \ln^2 x} \, dx = ?$$

$$10) \int_3^{19} \frac{x+3}{\sqrt{x} \cdot \sqrt{x+6}} \, dx = ?$$

$$11) \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \cdot \sin x \, dx = ?$$

$$12) \int_1^e \ln x \, dx = ?$$

$$13) \int_{-2}^2 (x^{15} + x^{7 \cdot \cos x} + \sin^9 x) \, dx = ?$$

$$14) \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x \cdot (1 - \sin^2 x)}{\sqrt{\sin x}} \, dx = ?$$

İNTEGRAL 6

BELİRLİ İNTEGRAL

15) $\int_0^{12} f\left(\frac{x}{3}\right) dx = 36$ ise $\int_0^2 (x+3-4.f(2x)) dx = ?$

16) $\int_1^4 f(\sqrt{x}) \frac{dx}{\sqrt{x}} = 3$ ise $\int_{\sqrt{2}}^2 5x.f\left(\frac{x^2}{2}\right) dx = ?$

17) $\int_0^3 (\sqrt{9-x^2}) dx$ integralinde $x=3\sin a$ dönüşümü yaparak tekrar integrali yazınız

18) $\int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{2+e^{2x}} dx$ integralinde $u=e^x$ dönüşümü yaparak tekrar integrali yazınız

19) $\int_1^{64} \left(\frac{\sqrt{x}-x}{\sqrt[3]{x}}\right) dx$ integralinde $x=u^6$ dönüşümü yaparak tekrar integrali yazınız

20) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cot(x+\pi)}{1+\tan(x-\pi)} dx = ?$ integralinde $x=t+\frac{\pi}{2}$ dönüşümü yaparak tekrar integrali yazınız

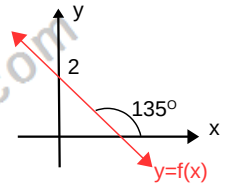
21) $y=f(x)$ fonkiyonu reel sayılarda türevli ve $x=1$ noktasındaki teğeti x eksenine paralel ve $x=5$ deki teğeti $y-3x+2=0$ doğrusuna dikse =?

$$\int_1^5 \frac{f''(x)}{x} dx + \int_5^1 \frac{f'(x)}{x^2} dx$$

22) $y=f(x)$ fonkiyonu n grafiği

şekildeki gibidir

$\int_3^5 f(x) + x.f'(x) dx$ integralinin değerini bulunuz



İNTEGRAL 6

BELİRLİ İNTEGRAL

23) $\int_0^a (2x^2 - 6x) dx$ integralinin alacağı sayısal sonuç en az kaçtır?

24) $f(x) = \begin{cases} 1+x & x < 1 \\ x & 1 \leq x \leq 3 \\ x-1 & x > 3 \end{cases}$ fonksiyonu için $\int_0^4 f(x) dx$

25) $f(x) = \begin{cases} 1+2x & x \geq 4 \\ 3x & x < 4 \end{cases}$ fonksiyonu için $\int_{-1}^3 f(x+3) dx$

26) $\int_1^4 |x-2| dx$

27) $\int_{-1}^3 x|x-2| dx$

28) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} |\sin x| dx$

29) $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{2}} \sqrt{1 - \cos^2 x} dx$

30) $\frac{d}{dx} \int_a^{x^2+1} \tan t dt$

31) $f(x) = \int_{\sqrt{x-2}}^x (t^2+1) dt$ veriliyor. f fonksiyonunun dönüm noktasının apsisi nedir?

32) $\frac{d}{dx} \int_1^x d(\ln t)$

33) $A(1,2)$ noktasında teğeti y eksenine dik, $B(4,7)$ noktasında yerel ekstremuma sahip $y=f(x)$ fonksiyonu için $\int_1^4 x \cdot f''(x) dx$ değerini bulunuz