

## İNTEGRAL-5

### BASİT KESİRLER

#### RASYONEL İNTEGRALLER VE BASİT KESİRLERE AYIRMA YÖNTEMİ

##### HATIRLATMA:

$P(x)$  ve  $Q(x)$  birer polinom olmak üzere  $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$  ifadesine rasyonel ifade deriz.

İntegrandında  $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$  gibi ifadeler içeren integrallerde

1.  $\text{der}[P(x)] \geq \text{der}[Q(x)]$  ise pay paydaya bölünür ve bilinen yöntemler denir

##### Örnek...1 :

$$\int \frac{x^2+3x+5}{x} dx$$

$$\frac{x^2}{2} + 3x + 5 \ln|x| + c$$

##### Örnek...2 :

$$\int \frac{x^2+5}{x-2} dx$$

$$\frac{x^2}{2} + 2x + 9 \ln|x-2| + c$$

2.  $\text{der}[P(x)] < \text{der}[Q(x)]$  ve bilinen yöntemler ile integral alınamıyorsa  $Q(x)$  polinomu çarpanlarına ayrılır ve ifade basit kesirlerine ayrılır.

#### BASİT KESİRLERE AYIRMA YÖNTEMİ

**Adım 1**  $(x-r)$  çarpanı  $Q(x)$  in birinci derece bir çarpanı ve  $(x-r)^n$   $Q(x)$  in en büyük kuvvetli çarpanı ise bu çarpmana  $n$  tane basit kesir ayrılır. Yani

$$\frac{A_1}{x-r} + \frac{A_2}{(x-r)^2} + \frac{A_3}{(x-r)^3} + \dots + \frac{A_n}{(x-r)^n}$$

Bu işlemi her lineer çarpan için tekrarlarız.

**Adım 2**  $(x^2+px+r)$   $Q(x)$  in ikinci dereceden bir çarpanı ( $\Delta < 0$ ) ve  $(x^2+px+r)^n$   $Q(x)$  in en büyük kuvvetli çarpanı ise bu çarpmana  $n$  tane basit kesir ayrılır. Yani

$$\frac{B_1x+C_1}{x^2+px+r} + \frac{B_2x+C_2}{(x^2+px+r)^2} + \dots + \frac{B_nx+C_n}{(x^2+px+r)^n}$$

Bu işlemi her ikinci derece çarpan için tekrarlarız

**Adım 3**  $f(x)$  bu basit kesirlerin toplamına eşitlenir.

**Adım 4** Polinomların eşitliği kullanılarak bilinmeyenler bulunur.

##### Örnek...3 :

Bazı ifadeler basit kesirlerine ayrılmıştır. İnceleyiniz

$$1) \frac{1}{(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2}$$

$$2) \frac{1}{(x^2-25)(x+2)} = \frac{A}{x-5} + \frac{B}{x+5} + \frac{C}{x+2}$$

$$3) \frac{1}{(x+1)(x^2+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+2}$$

$$4) \frac{1}{(x+3)^2} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{(x+3)^2}$$

$$5) \frac{1}{x^2(x^2+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1} + \frac{Ex+F}{(x^2+1)^2}$$

## İNTEGRAL-5

### BASİT KESİRLER

#### Örnek...4 :

$$\int \frac{1}{(x-1)(x+2)} dx$$

$$\frac{1}{3} \ln \left| \frac{x-1}{x+2} \right| + c$$

#### Örnek...5 :

$$\int \frac{12}{x^2-9} dx$$

$$2 \ln \left| \frac{x-3}{x+3} \right| + c$$

#### Örnek...6 :

$$\int \frac{dx}{x(x^2+1)}$$

$$\ln|x| - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + c$$

#### Örnek...7 :

$$\int \frac{20}{x(x-1)^2} dx$$

$$20 \left( \ln \left| \frac{x}{x-1} \right| - \frac{1}{x-1} \right) + c$$

#### Örnek...8 :

$$\int \frac{x^3}{x-1} dx$$

$$\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \ln|x-1| + c$$

#### DEĞERLENDİRME

$$1) \int \frac{3x+1}{x^2-4} dx$$

$$\frac{7}{4} \ln|x-2| + \frac{5}{4} \ln|x+2| + c$$

$$2) \int \frac{6x+7}{(x-1)^2} dx$$

$$6 \ln|x-1| + \frac{13}{1-x} + c$$

$$3) \int \frac{x+4}{x^3+3x^2-10x} dx$$

$$-\frac{2}{5} \ln|x| - \frac{1}{35} \ln|x+5| + \frac{3}{7} \ln|x-2| + c$$

$$4) \int \frac{dx}{x^3+16x}$$

$$\frac{1}{16} \ln|x| - \frac{1}{32} \ln(x^2+16) + c$$