

TRİGONOMETRİ – 2

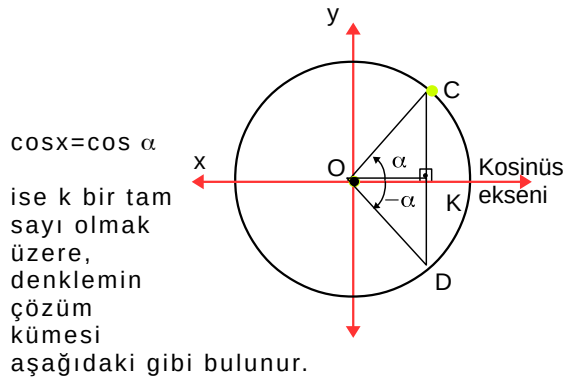
TRİGONOMETRİK DENKLEMLER

TRİGONOMETRİK DENKLEMLER

İçinde bilinmeyen trigonometrik fonksiyonları bulunan, bilinmeyen bazı değerleri için doğru olan eşitliklere, trigonometrik denklem denir. Denklemi sağlayan değerlere, denklemin kökleri; köklerin oluşturduğu kümeye de çözüm kümesi denir. Çözüm kümesini bulmak için yapılan işlemlere de denklemin çözümü denir.

A) $\cos(x) = \cos \alpha$ DENKLEMİNİN ÇÖZÜMÜ

Birim çember üzerinde standart pozisyonda α radyanlık yayın bitim noktası C, $-\alpha$ radyanlık yayın bitim noktası D olsun. Şekli inceleyiniz.



$$\mathcal{C} = \{x: x = \alpha + k.2\pi \text{ veya } x = -\alpha + k.2\pi\}$$

GENEL OLARAK

$$\cos(f(x)) = \cos(g(x)) \rightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) + k.2\pi \\ f(x) = -g(x) + k.2\pi \end{cases}$$

Örnek...1 :

$\cos(4x-60) = \cos(2x)$
denkleminin çözüm kümesini bulunuz?

$$\begin{aligned} 4x-60 &= 2x + k.360 & 4x-60 &= -2x + k.360 \\ x &= 30 + k.180 & x &= 10 + k.60 \end{aligned}$$

$$\mathcal{C} = \left\{ x: x = 30 + k.180 \vee x = 10 + k.60, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Örnek...2 :

$$\cos(2x+40) = \frac{-\sqrt{3}}{2} = \cos 150$$

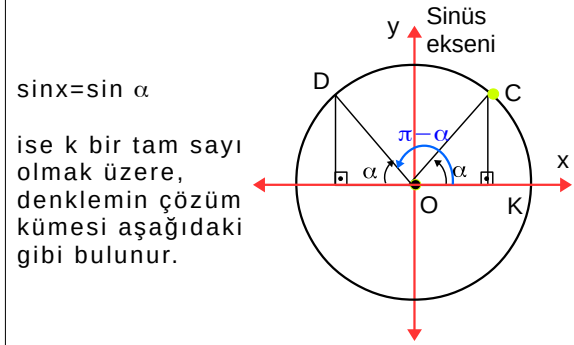
denkleminin çözüm kümesini bulunuz

$$\begin{aligned} 2x+40 &= 150 + k.360 & 2x+40 &= -150 + k.360 \\ x &= 55 + k.180 & x &= -95 + k.180 \end{aligned}$$

$$\mathcal{C} = \left\{ x: x = 55 + k.180 \vee x = -95 + k.180, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

B) $\sin(x) = \sin \alpha$ DENKLEMİNİN ÇÖZÜMÜ

Birim çember üzerinde standart pozisyonda α radyanlık yayın bitim noktası C, $\pi - \alpha$ radyanlık yayın bitim noktası D olsun. Şekli inceleyiniz.



$$\mathcal{C} = \{x: x = \alpha + k.2\pi \text{ veya } x = \pi - \alpha + k.2\pi\}$$

GENEL OLARAK

$$\sin(f(x)) = \sin(g(x)) \rightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) + k.2\pi \\ f(x) = \pi - g(x) + k.2\pi \end{cases}$$

Örnek...3 :

$\sin(5x-120) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz

$$\begin{aligned} \sin(5x-120) &= \sin 60 \\ 5x-120 &= 60 + k.360 & 5x-120 &= 120 + k.360 \\ x &= 36 + k.72 & x &= 48 + k.72 \end{aligned}$$

$$\mathcal{C} = \left\{ x: x = 36 + k.72 \vee x = 48 + k.72, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

TRİGONOMETRİ - 2

TRİGONOMETRİK DENKLEMLER

Örnek...4 :

$\sin(6x-40) = \cos(2x+20)$
denkleminin çözüm kümesini bulunuz?

$$\cos(90-6x+40) = \cos(2x+20)$$

$$\cos(130-6x) = \cos(2x+20)$$

$$130-6x = 2x+20 + k \cdot 360 \quad 130-6x = -2x-20 + k \cdot 360$$

$$-8x = -110 + k \cdot 360 \quad \checkmark \quad -4x = -150 + k \cdot 360$$

$$x = \frac{110}{8} + k \cdot 45 \quad \checkmark \quad x = \frac{150}{4} + k \cdot 90$$

$$G = \left\{ x : x = \frac{110}{8} + k \cdot 45 \quad \checkmark \quad x = \frac{150}{4} + k \cdot 90 \right\}$$

Örnek...5 :

$\sin(2x+40) = -\sin x$
denkleminin çözüm kümesini bulunuz?

$$\sin(2x+40) = \sin(-x)$$

$$2x+40 = -x + k \cdot 360 \quad \checkmark \quad 2x+40 = 180+x + k \cdot 360$$

$$x = \frac{-40}{3} + k \cdot 120 \quad \checkmark \quad x = 140 + k \cdot 360$$

$$G = \left\{ x : x = \frac{40}{3} + k \cdot 120 \quad \checkmark \quad x = 140 + k \cdot 360 \right\}$$

Örnek...6 :

$\sin(x) = -1$
denkleminin $(0, 360)$ aralığında kaç farklı çözümü vardır?

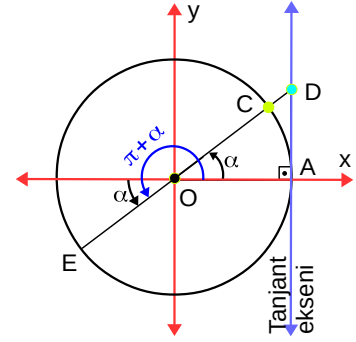
$$\sin x = \sin 270$$

$$x = 270 + k \cdot 360 \quad \checkmark \quad x = 180 - 270 + k \cdot 360$$

$$x_1 = 270$$

C) $\tan(x) = \tan \alpha$ DENKLEMİNİN ÇÖZÜMÜ

Birim çember üzerinde standart pozisyonda α radyanlık yayın bitim noktası C, $\pi + \alpha$ radyanlık yayın bitim noktası E olsun. $x=1$ doğrusuna tanjant eksenini dendiğini öğrenmiştik. Orijinden ve C (ve E) noktasından geçen doğrunun tanjant eksenini kestiği nokta D olsun. İnceleyiniz.



$$\tan x = \tan \alpha$$

ise k bir tam sayı olmak üzere

$$G = \{x : x = \alpha + k \cdot \pi\}$$

GENEL OLARAK

$$\tan(f(x)) = \tan(g(x)) \rightarrow f(x) = g(x) + k \cdot \pi$$

Örnek...7 :

$\tan(x) = \sqrt{3}$
denkleminin çözüm kümesini bulunuz?

$$\tan x = \tan 60$$

$$x = 60 + k \cdot 180$$

$$G = \left\{ x : x = 60 + k \cdot 180, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Örnek...8 :

$\tan(5x-20^\circ) = \tan(3x+30^\circ)$
denkleminin çözüm kümesini bulunuz?

$$5x-20 = 3x+30 + k \cdot 180$$

$$2x = 50 + k \cdot 180$$

$$x = 25 + k \cdot 90$$

$$G = \left\{ x : 25 + k \cdot 90, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

TRİGONOMETRİ - 2

TRİGONOMETRİK DENKLEMLER

D) $\cot(x)=\cot\alpha$ DENKLEMİNİN ÇÖZÜMÜ

$\cot x = \cot \alpha$ ise k bir tam sayı olmak üzere

$$\mathcal{C} = \{x: x = \alpha + k \cdot \pi\}$$

GENEL OLARAK

$$\cot(f(x)) = \cot(g(x)) \rightarrow f(x) = g(x) + k \cdot \pi$$

Örnek...9 :

$\cot(3x) = -1$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz

$$\cot 3x = \cot 135$$

$$3x = 135 + k \cdot 180$$

$$x = 45 + k \cdot 60$$

$$\mathcal{C} = \left\{ x: x = 45 + k \cdot 60, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Örnek...10 :

$\cot(3x) = \tan(2x)$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz

$$\cot(3x) = \cot(90 - 2x)$$

$$3x = 90 - 2x + k \cdot 180$$

$$5x = 90 + k \cdot 180$$

$$x = 18 + k \cdot 36$$

$$\mathcal{C} = \left\{ x: x = 18 + k \cdot 36, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Örnek...11 :

$\tan 2x + \frac{\sqrt{2} - 2\sin 2x}{\cos 2x} = 1$ denkleminin $(0, 90)$ arasındaki çözümünü kaçtır?

$$\frac{\sin 2x + \sqrt{2} - 2\sin 2x}{\cos 2x} = 1$$

$$\sqrt{2} - \sin 2x = \cos 2x$$

$$\cos 2x + \sin 2x = \sqrt{2}$$

$$\cos 2x + \frac{\sin 45}{\cos 45} \sin 2x = \sqrt{2}$$

$$\cos 2x \cos 45 + \sin 45 \sin 2x = \sqrt{2} \cos 45$$

$$\cos(2x - 45) = 1 = \cos 0$$

$$2x - 45 = 0 + k \cdot 360$$

$$x = \frac{45}{2} + k \cdot 180$$

$$\mathcal{C} = \left\{ x: x = \frac{45}{2} + k \cdot 180 \right\}$$

Örnek...12 :

$\tan x + \cot x = 4\cos 2x$ denklemini sağlayan x in pozitif en küçük değeri kaçtır?

$$\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = 4\cos 2x$$

$$\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos x \sin x} = \frac{1}{\cos x \sin x} = 4\cos 2x$$

$$1 = 4 \cdot \cos 2x \cdot \frac{\sin 2x}{2} = 2\cos 2x \sin 2x$$

$$1 = \sin 4x = \sin 90 \quad (\text{aynı})$$

$$4x = 90 + k \cdot 360 \quad \checkmark \quad 4x = 90 + k \cdot 360$$

$$x = 22,5 + k \cdot 90$$

$$x_{\min} = 22,5$$

Örnek...13 :

$2\cos x < \cot x$ eşitsizliğinin $(0, 90)$ aralığında çözüm kümesini bulunuz

$$2\cos x < \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$\frac{2\cos x \sin x - \cos x}{\sin x} < 0$$

$$\sin 2x < \cos x = \sin(90 - x)$$

$$2x < 90 - x \rightarrow x < 30$$

$$\mathcal{C} = (0, 30)$$

TRİGONOMETRİ - 2

TRİGONOMETRİK DENKLEMLER

$a \cdot b \neq 0, a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere $a \sin x + b \cos x = c$ biçimindeki denklemlere klasik denklemler denir. Bu denklemler b ye bölünüp $\frac{a}{b} \sin x + \cos x = \frac{c}{b}$ biçimine getirildikten sonra ($\cos x$ katsayısı 1 yapıldıktan sonra) $\tan(\theta) = \frac{a}{b}$ dönüşü ile beraber yay toplam fark bağıntıları kullanılarak çözülür.

Uyarı $f(x) = m \sin x + n \cos x$ fonksiyonu x in gerçekte sayı değerleri için $[-\sqrt{m^2+n^2}, \sqrt{m^2+n^2}]$ aralığında değerler alır

Örnek...14 :

$\sqrt{2} \sin x + \sqrt{3} \cos x = 3$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

$$\sqrt{2^2} + \sqrt{3^2} = 5$$

$$\sqrt{2} \sin x + \sqrt{3} \cos x \in [-\sqrt{5}, \sqrt{5}]$$

$$3 = \emptyset$$

3 bu kümede yok

Örnek...15 :

$\sqrt{3} \sin x + \cos x = \sqrt{2}$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

$$\sin x + \frac{1}{\sqrt{3}} \cos x = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

$$\sin x + \frac{\sin 30}{\cos 30} \cdot \cos x = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

$$\sin(x+30) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin(45)$$

$$x+30 = 45 + k \cdot 360 \quad x+30 = 135 + k \cdot 360$$

$$x = 15 + k \cdot 360 \quad \checkmark \quad x = 105 + k \cdot 360$$

Örnek...16 :

$3 \sin x + 4 \cos x = 5$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

$$\sin x + \frac{4}{3} \cos x = \frac{5}{3} \quad \tan u = \frac{4}{3}$$

$$\sin x + \frac{\sin u}{\cos u} \cos x = \frac{5}{3}$$

$$\sin(x+u) = \frac{5}{3} \cdot \cos u = \frac{5}{3} \cdot \frac{3}{5} = 1$$

$$\sin(x+u) = \sin 90$$

$$x+u = 90 + k \cdot 360$$

$$x = 90 - u + k \cdot 360 \quad x = 90 - \arctan \frac{4}{3} + k \cdot 360$$

$f(\sin x, \cos x) = 0$ denkleminde $\sin x$ ve $\cos x$ ifadelerinin dereceleri eşitse bu tür denklemlere homojen trigonometrik denklem denir. Bu tür denklemlerde eşitliğin her iki yanını $\cos x$ in uygun kuvvetine bölünerek cebirsel hale getirilebilir

Örnek...17 :

$\sin^2 x - 2 \cos x \cdot \sin x - 8 \cos^2 x = 0$ olduğuna göre $\tan x$ değeri kaçta eşit olabilir?

$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \frac{2 \cos x \sin x}{\cos^2 x} - \frac{8 \cos^2 x}{\cos^2 x} = 0$$

$$t^2 - 2t - 8 = 0$$

$$(t-4)(t+2) = 0$$

$$\tan x = 4$$

$$\tan x = -2$$

Örnek...18 :

$\sin^2 x + (\sqrt{3}+1) \cos x \cdot \sin x + \sqrt{3} \cos^2 x = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

$$\cos^2 x$$

$$t^2 + (\sqrt{3}+1)t + \sqrt{3} = 0$$

$$(t+\sqrt{3})(t+1) = 0$$

$$\tan x = -\sqrt{3} = \tan 120 \rightarrow x = 120 + k \cdot 180$$

$$\tan x = -1 = \tan 135 \rightarrow x = 135 + k \cdot 180$$

TRİGONOMETRİ - 2

TRİGONOMETRİK DENKLEMLER

DEĞERLENDİRME

- 1) $\cos^2 2x - \sin^2 2x = \sin x$ denkleminin $(0, 180)$ arasında kaç kökü vardır?

$$\cos 4x = \sin x = \cos(90-x)$$

$$4x = 90 - x + k \cdot 360 \quad \vee \quad 4x = -90 + x + k \cdot 360$$

$$x = 18 + k \cdot 72 \quad \vee \quad x = -30 + k \cdot 120$$

$$x = 18, 90, 162, 90 \quad (4 \text{ de\u0131er})$$

- 2) $\tan(4x-20) \cdot \tan(2x) = 1$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz?

$$\tan(4x-20) = \frac{1}{\tan 2x} = \cot 2x = \tan(90-2x)$$

$$4x-20 = 90-2x + k \cdot 180$$

$$x = \frac{110}{6} + k \cdot 30$$

- 3) $\sec x = 2$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz?

$$\frac{1}{\cos x} = 2 \quad \cos x = \frac{1}{2} = \cos 60$$

$$x = 60 + k \cdot 360 \quad \vee \quad x = -60 + k \cdot 360$$

$$G = \{ x \mid x = 60 \mp k \cdot 360 \quad \vee \quad x = -60 \mp k \cdot 360, k \in \mathbb{Z} \}$$

- 4) $2\cos^2 x - 3\cos x - 2 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz?

$$\begin{matrix} 2\cos x & & 1 \\ (\cos x) & & -2 \end{matrix}$$

$$(2\cos x + 1)(\cos x - 2) = 0 \Rightarrow \cos x = -\frac{1}{2}$$

$$\cos x = -\frac{1}{2} = \cos 120$$

$$x = 120 + k \cdot 360 \quad \vee \quad x = -120 + k \cdot 360$$

$$G = \{ x \mid x = \pm 120 + k \cdot 360, k \in \mathbb{Z} \}$$

- 5) $\cos^2 x - \sin^2 x = 2\sin 2x - \cos 2x$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz?

$$\cos 2x = 2\sin 2x - \cos 2x$$

$$\cos 2x = \sin 2x \rightarrow \tan 2x = 1 = \tan 45$$

$$2x = 45 + k \cdot 180 \rightarrow x = \frac{45}{2} + k \cdot 90$$

$$G = \{ x \mid x = \frac{45}{2} + k \cdot 90, k \in \mathbb{Z} \}$$

- 6) $\sin x - \tan 60 \cdot \cos x = 1$ denkleminin en küçük kökü kaçtır?

$$\sin x - \frac{\sin 60}{\cos 60} \cdot \cos x = 1$$

$$\sin(x-60) = \cos 60 = \sin 30$$

$$x-60 = 30 + k \cdot 360 \quad \vee \quad x-60 = 150 + k \cdot 360$$

$$x_{\min} = 90$$

- 7) $\sin x + \cos x = 1$ denkleminin kökler toplamı kaçtır?

$$\sin x + \frac{\sin 45}{\cos 45} \cos x = 1$$

$$\sin(x+45) = \cos 45 = \sin 45$$

$$x+45 = 45 + k \cdot 360 \quad \vee \quad x+45 = 135 + k \cdot 360$$

$$x = k \cdot 360 \quad \vee \quad x = 90 + k \cdot 360$$

- 8) $\frac{1}{1-\cos x} + \frac{1}{1+\cos x} = \frac{4}{3}$ denkleminin $(0, 500)$ aralığında kaç kökü vardır?

$$\frac{1+\cos x + 1-\cos x}{1-\cos^2 x} = \frac{4}{3}$$

$$\frac{2}{\sin^2 x} = \frac{4}{3} \rightarrow \sin x = \frac{\sqrt{6}}{2} \quad \sin x = -\frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$G = \emptyset$$

$$\sin x \in [-1, 1] !$$

- 9) $\cos^3 x + 2\sin^3 x = 3\cos x \sin^2 x$ denklemini sağlayan dar açı kaç derecedir?

$$t = \tan x \quad \cos^3 x = \frac{1}{\cos^3 x}$$

$$1 + 2t^3 = 3t^2 \rightarrow 2t^3 - 3t^2 + 1 = 0 = (t-1)(2t^2+t-1)$$

$$\begin{matrix} 2t & & +1 \\ + & & -1 \end{matrix}$$

$$\tan x = 1 \quad \vee \quad \tan x = -\frac{1}{2}$$

$$\downarrow \quad \downarrow$$

$$x = 45^\circ \quad \text{geni\u015f a\u00e7ı}$$

- 10) $a \cdot \sin x + b \cdot \cos x = c$ denkleminin çözüm kümesinin boş olmaması için a, b ve c arasında hangi bağıntı olmalıdır?

$$c \in [-\sqrt{a^2+b^2}, \sqrt{a^2+b^2}]$$