

İNTEGRAL-2

TEMEL İNTEGRAL KAVRAMLARI

BELİRSİZ İNTEGRAL

$f:A \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $x \in A$ için türevlenebiliyor ise $\frac{df(x)}{dx} = f'(x)$ olur.

$df(x) = f'(x) \cdot dx$ ifadesine f fonksiyonun diferansiyeli denir

Bu ifade $dy = f'(x) \cdot dx$ olarak da yazılabilir.

Örnek...1 :

$y = x^2 + 3x + 5$ fonksiyonunun diferansiyeli , dy nedir?

$$dy = (2x + 3)dx$$

Örnek...2 :

$x = \sin^2 t + 2\cos^2 t$ ise $dx = ?$

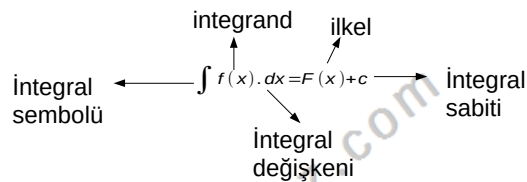
$$dx = (\cos^2 2t - 2\sin 2t)dt$$

İntegral alma işlemi türevi veya diferansiyeli belli olan fonksiyonun kendisini (ilkeli) bulmak için yapılan işlemdir.

Türevi $f(x)$ olan $F(x)$ fonksiyonuna , $f(x)$ in belirsiz integrali (ilkeli) denir.

Yani $F'(x) = f(x)$ ise $F(x)$ ye $f(x)$ in ilkeli denir ve bu

$$\int f(x)dx = F(x) + c \text{ ile gösterilir.}$$



Örneğin $\int 2x dx = x^2 + c$

İNTEGRAL ALMA İŞLEMİNİN ÖZELLİKLERİ

$$\int a \cdot f(x) dx = a \int f(x) dx$$

$$\int f(x) \pm g(x) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$$

$$\int f(x) dx = \int f(k) dk = \int f(m) dm \dots$$

TEMEL BELİRSİZ İNTEGRAL ALMA KURALLARI

Birçok ilkel türeve ait kuralların tersine çevrilmesiyle elde edilir. Bunların bazıları şöyledir :

1.

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, n \neq -1$$

Örnek...3 :

$$\int x^2 dx = ?$$

$$\frac{x^3}{3} + c$$

Örnek...4 :

$$\int dx = ?$$

$$x$$

Örnek...5 :

$$\int \frac{1}{x^3} dx = ?$$

$$\frac{x^{-2}}{-2} + c$$

Örnek...6 :

$$\int \sqrt{x} dx = ?$$

$$\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + c$$

Örnek...7 :

$$\int \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}} dx = ?$$

$$4 \cdot x^{\frac{1}{4}} + c$$

İNTEGRAL-2

TEMEL İNTEGRAL KAVRAMLARI

Örnek...8 :

$$\int \frac{1}{\sqrt[5]{3^2 x}} dx = ?$$

$$\frac{30}{29} x^{\frac{29}{30}} + c$$

Örnek...9 :

$$\int (x + x^3 - 4) dx = ?$$

$$\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} - 4x + c$$

Örnek...10 :

$$\int \left(\sum_{k=0}^2 (k+1)x^k \right) dx = ?$$

$$x + x^2 + x^3 + c$$

Örnek...11 :

$$\int \frac{1}{\sqrt[4]{x}} dt = ?$$

$$\frac{1}{\sqrt[4]{x}} t + c$$

$$2. \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$$

$$\text{genelleme } \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + c$$

Örnek...12 :

$$\int \frac{2x}{x^2+5} dx = ?$$

$$\ln(x^2+5) + c$$

Örnek...13 :

$$\int \frac{\cos x}{\sin x} dx = ?$$

$$\ln|\sin x| + c$$

Örnek...14 :

$$\int \tan x dx = ?$$

$$\ln|\sec x| + c$$

Örnek...15 :

$$\int \frac{x^2-2x}{x^3-3x^2} dx = ?$$

$$\frac{1}{3} \ln|x^3-3x^2| + c$$

Örnek...16 :

$$\int \frac{\ln x + 1}{x \ln x} dx = ?$$

$$\ln|x \cdot \ln x| + c$$

$$3. \int \cos(ax+b) dx = \frac{1}{a} \sin(ax+b) + c$$

$$\int \sin(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax+b) + c$$

Örnek...17 :

$$\int \cos(x) dx = ?$$

$$\sin x + c$$

Örnek...18 :

$$\int \cos(2x) dx = ?$$

$$\frac{1}{2} \sin 2x + c$$

Örnek...19 :

$$\int \cos(7x-3) dx = ?$$

$$\frac{1}{7} \sin(7x-3) + c$$

Örnek...20 :

$$\int \sin(x) dx = ?$$

$$-\cos x + c$$

Örnek...21 :

$$\int \sin(6x+2) dx = ?$$

$$\frac{1}{6} \cos(6x+2) + c$$

Örnek...22 :

$$\int \sin(7-3x) dx = ?$$

$$\frac{1}{3} \cos(7-3x) + c$$

Örnek...23 :

$$\int \cos\left(\frac{x}{3}\right) dx = ?$$

$$3 \sin\left(\frac{x}{3}\right) + c$$

İNTEGRAL-2

TEMEL İNTEGRAL KAVRAMLARI

$$4 \int (1+\tan^2 x) dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int \sec^2 x dx = \tan x + c$$

$$\int (1+\cot^2 x) dx = \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = \int \operatorname{cosec}^2 x dx = -\cot x + c$$

Örnek...24 :

$$\int (2+\tan^2 x) dx = ?$$

$$\tan x + x + c$$

Örnek...25 :

$$\int (\tan^2 x) dx = ?$$

$$\tan x - x + c$$

$$6. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$$

$$\int e^x dx = e^x + c \quad \text{ve} \quad \int e^{kx} dx = \frac{1}{k} e^x + c$$

Örnek...26 :

$$\int 10^x dx = ?$$

$$\frac{10^x}{\ln 10} + c$$

Örnek...27 :

$$\int (2^x + \ln 2) dx = ?$$

$$\frac{2^x}{\ln 2} + x \cdot \ln 2 + c$$

Örnek...28 :

$$\int 7^{\frac{x}{2}} dx = ?$$

$$\frac{2 \cdot 7^{\frac{x}{2}}}{\ln 7} + c$$

Örnek...29 :

$$\int e^x + e^{2x} dx = ?$$

$$e^x + \frac{1}{2} e^{2x}$$

TÜREV İNTEGRAL VE DİFERANSİYEL İLİŞKİSİ

$$1 \quad \frac{d}{dx} \left(\int f(x) dx \right) = f(x)$$

$$2 \quad d \left(\int f(x) dx \right) = f(x) dx$$

$$3 \quad \left(\int d(f(x)) \right) = f(x) + c$$

Örnek...30 :

$$\frac{d}{dx} \left(\int x^2 dx \right) = ?$$

$$x^2$$

Örnek...31 :

$$d \left(\int x^2 dx \right) = ?$$

$$x^2 dx$$

Örnek...32 :

$$\int d(x^2) = ?$$

$$x^2 + c$$

Örnek...33 :

$$\int d(x^2) + \int d\left(\frac{1}{x} - x^2\right)$$

$$x^2 + \frac{1}{x} - x^2 + c$$

Örnek...34 :

$$\int \frac{d(x^2)}{x^2 + 5}$$

$$\ln(x^2 + 5) + c$$

Örnek...35 :

$$\int \cos^3 x \cdot d(\tan x)$$

$$\sin x + c$$

Örnek...36 :

$f(x) = \frac{d}{dx} \int x \cdot \ln x dx$ ise f fonksiyonunun apsisi e olan noktadan çizilen teğetin eğimi ne olur?

$$1 + e$$

İNTEGRAL-2

TEMEL İNTEGRAL KAVRAMLARI

Örnek...37 :

$$\int f(x) \cdot x^2 dx = \frac{x^6}{6} - 3x + 1 \text{ ise } f(2) = ?$$

$\frac{29}{4}$

Örnek...38 :

$$f(x) = \int d(x^2 - 2) \text{ ise } f'(9) = ?$$

18

Örnek...39 :

$f(x) = \int (x^2 - 3x + 1) dx$ ise $f(x)$ fonksiyonun $x=4$ de teğetinin eğimi nedir?

5

Örnek...40 :

$$\int \left(\frac{x}{x+2} \cdot f(x) \right) dx = 2x^2 - 3x + 2 \text{ ise } f(x) = ?$$

$$\frac{4x^2 + 5x - 6}{x}$$

Örnek...41 :

$f(x) = \int (4x^2 - 2x + 3) dx$ ise $f(x)$ fonksiyonunun dönüm noktasının apsisini bulunuz

$\frac{1}{4}$

DEĞERLENDİRME

1) $\int \left(\sum_{k=1}^2 (k+1) x^k \right) dx$

2) $\int \sqrt[9]{x} : \sqrt[5]{x} : \sqrt[3]{x} : \dots dx = ?$

3) $\int \frac{x+1}{2x+2} dx = ?$

4) $\int \frac{x^2}{x^3 + \sqrt{7}} dx = ?$

5) $\int \frac{\ln x^{2x} + x}{x^2 \ln x} dx = ?$

6) $\int \sin \left(\frac{x+2}{3} \right) dx = ?$

7) $\int \cos(6 - x\sqrt{5}) dx = ?$

8) $\int 1 - \tan^2 x dx = ?$

İNTEGRAL-2

TEMEL İNTEGRAL KAVRAMLARI

9) $\int \frac{6^x}{\ln 2 + \ln 3} dx = ?$

10) $\int x^5 + 6x^3 - \cos \frac{5x}{2} dx = ?$

11) $\int \left(\frac{8x^2 - 5x + 7}{x^2} \right) dx = ?$

12) $\int 6x^2 \left(x^2 - \frac{1}{3x} + 2 \right) dx = ?$

13) $\int \left(\frac{e^{2x} + 3e^x + 2}{e^{2x}} \right) dx = ?$

14) $\int \left(\frac{7}{4x-3} \right) dx = ?$

15) $\int (5 + \tan^2 x + \cot^2 x) dx = ?$

16) $\int (\cos^2 x - \sin^2 x) dx = ?$

17) $\int \left(\frac{\sin^2 x}{1 - \cos x} \right) dx = ?$

18) $\int (\cos 2x \cdot \cos 4x) dx = ?$

19) $\int \left(\frac{\tan x \cdot \cot x}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x} \right) dx = ?$

20) f fonksiyonu (2,3) noktasındaki teğeti x eksenine pozitif yönde 45 derecelik açı yapıyor ve $f'(x) = 2x - 3$ ise $f(0)$ kaçtır?

21) f(x) fonksiyonunun grafiğine x=1 noktasında çizilen teğetin eğimi 4, $f'(x) = 6x + 2$ ve $f(1) = 2$ olduğuna göre, $f(2)$ kaç eşittir?

İNTEGRAL-2

TEMEL İNTEGRAL KAVRAMLARI

- 22) $y=f(x)$ fonksiyonunun her x gerçel sayısı için birinci türevi $(8x^2-6x+2)$ dir. $A(1,2) \in f$ ise $\int \left(\frac{f(x)}{x^2} \right) dx = ?$ =?

- 23) $\int (f''(x)) dx = mx^2 + nx - \sqrt[3]{3}$ veriliyor. f fonksiyonun dönüm noktası $A(0,1)$ dir . Bu fonksiyon $x=1$ de maksimum, $x=-2$ de minimum değerlerine sahipse $(m+n)$ kaçtır?

- 24) $\int \left(\frac{f'(x)}{f^3(x)} \right) dx = \int dx$ ve $f(0)=1$ ise $f(3)=?$

- 25) $P(x)$ bir polinom fonksiyon ve $P(x) \int P(x) dx = 4x^2 - 3x$ ise bu polinomun katsayılar toplamı kaç olabilir?

26) $\int \left(\frac{d(\sin x)}{\cos^3 x} \right) = ?$

27) $\int \left(\frac{d(x^3)}{x^2} \right) = ?$

28) $\int (d(x^3 + 4x + \sqrt{21})) = ?$

- 29) $\int (x^2 - 1) \cdot f(x) dx = \frac{x^5}{5} - x$ ise f fonksiyonuna $x = \frac{1}{2}$ noktasından çizilen teğet x eksenine pozitif yönde kaç derecelik açı yapar ?