

TÜREV UYGULAMALARI – 1

(TÜREVİN GEOMETRİK YORUMU, FİZİKSEL YORUMU, DEĞİŞİM HIZI VE DEĞERLENDİRMELER)

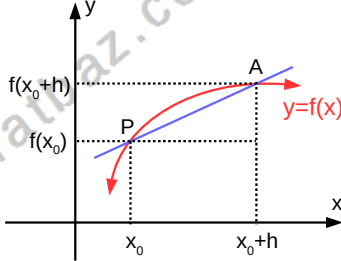
TÜREVİN GEOMETRİK YORUMU

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, y=f(x)$

fonksiyonuna
düzlemde
karşılık gelen
eğri yanda ki
gibi olsun.

Eğrinin
 $P(x_0, f(x_0))$
noktasındaki
teğetlerini
araştıralım. Bunun için $P(x_0, f(x_0))$
noktasının sağda veya solundaki
 $A(x_0+h, f(x_0+h))$ noktasını alıp A ve P den
geçen keseni çizelim. Dikkat edilirse
kesenin eğiminin $m = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ olduğu

görülür. Şimdi P noktasından geçen
teğeti bulmak için A noktasını eğri
üzerinde kaydırarak P noktasına
yaklaştıralım. Bu işlemi yapmakla h
değerini 0 a yaklaştırmak aynı şey
olacaktır. Bu halde teğetin eğimi $h \rightarrow 0$
için $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ in alacağı limit değeri
olacaktır.



EĞİM, TEĞET DOĞRU VE NORMAL DOĞRU

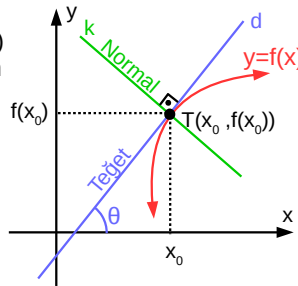
$y=f(x)$ fonksiyonun
üzerindeki $(x_0, f(x_0))$
noktasından çizilen
teğet doğrunun
eğimi m_d ise

$$m_d = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

olur.

Ayrıca $m_d = \tan \theta$ dır.

T noktasında d teğet doğrusuna dik olan
k doğrusuna ise $y=f(x)$ in T noktasındaki
normali denir.



HATIRLATMA

Eğimi m ve (x_0, y_0) noktasından geçen
doğrunun denklemi $y-y_0=m.(x-x_0)$ olur.

Dik doğruların eğimleri çarpımı -1 dir.
Yani, $m_d \cdot m_k = -1$ dir.

TEĞET DOĞRU DENKLEMİ (T.D.D.)

$$y-y_0=m_d.(x-x_0)$$

NORMAL DOĞRU DENKLEMİ (N.D.D.)

$$y-y_0= \frac{-1}{m_d} .(x-x_0)$$

Örnek...1 :

$y=f(x)=x^2-4x+3$ fonksiyonun $x=3$
noktasındaki teğetin eğimini bulunuz?

2

Örnek...2 :

$y=\sin(3x)-5x$ fonksiyonun $x=\frac{\pi}{2}$ noktasındaki
teğetin eğimini bulunuz?

-5

Örnek...3 :

$y=f(x)=x^3-x$ fonksiyonun $x=2$ noktasındaki
normalinin eğimini bulunuz?

$-\frac{1}{11}$

Örnek...4 :

$y=f(x,y)=x^3-3x^{2y}+y^2+1=0$ fonksiyonun $(1,1)$
noktasındaki teğetin eğimini bulunuz?

$\frac{3}{2}$

Örnek...5 :

$y=\sin t, x=\cos^2 t$ fonksiyonun üzerinde $x=\frac{\pi}{6}$
noktasından çizilen teğetin eğimini bulunuz?

$\frac{\pi}{6}$

Örnek...6 :

$y=f(x)=x^2-7x$ fonksiyonun üzerindeki $P(1,f(1))$
noktasından geçen teğetin denklemini
bulunuz?

$y=-5x-1$

TÜREV UYGULAMALARI – 1

(TÜREVİN GEOMETRİK YORUMU, FİZİKSEL YORUMU, DEĞİŞİM HIZI VE DEĞERLENDİRMELER)

Örnek...7 :

$y=f(x)=4x^2$ fonksiyonun $x=2$ noktasındaki teğetinin denklemini bulunuz?

$$y=16x-16$$

Örnek...8 :

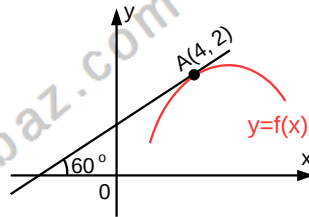
$y=\cos x+x$ fonksiyonun $x=0$ noktasındaki normalinin denklemini bulunuz?

$$y=-x+1$$

Örnek...9 :

$y=f(x)$ fonksiyonu ve A noktasındaki teğeti verilmiştir.

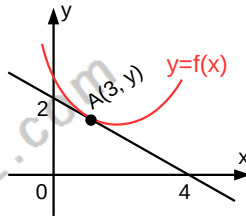
$g(x)=f^2(x)-\frac{5}{f(x)}$ ise g fonksiyonunun $x=4$ deki teğetinin eğimi kaçır?



$$\frac{21\sqrt{3}}{4}$$

Örnek...10 :

$y=f(x)$ fonksiyonu ve A noktasındaki teğeti verilmiştir. $h(x)=f^2(3x)$ ise h fonksiyonunun $x=1$ deki teğetinin eğimi kaçır?



$$-\frac{3}{2}$$

Örnek...11 :

$g(x)=\frac{x^3}{3}-3x+a$ ile $f(x)=2+x$ fonksiyonu teğetse a sayısının negatif değeri kaçır?

$$-\frac{10}{3}$$

Örnek...12 :

$f(x)=3x^2-6x+5$ ve $g(x)=mx^2+(n-2)x-3$ fonksiyonlarının her x için teğetleri paralelse m ve n yi bulunuz.

$$(3, -4)$$

Örnek...13 :

$f(x)=x^2-3$ fonksiyonuna A(4,0) noktasından çizilen teğetlerin değme noktalarının apsiler toplamını bulunuz?

$$8$$

Örnek...14 :

$f(x)=x^2+2$ fonksiyonuna üzerindeki A(1,y) noktasından çizilen normal eğriyi başka hangi noktada keser?

$$\left(\frac{3}{2}, \frac{17}{4}\right)$$

TÜREV UYGULAMALARI – 1

(TÜREVİN GEOMETRİK YORUMU, FİZİKSEL YORUMU, DEĞİŞİM HIZI VE DEĞERLENDİRMELER)

Örnek...15 :

$f(x)=\frac{k}{x}$ ile $g(x)=\frac{x^2}{9}$ eğrileri dik kesişiyor ise k kaçtır?

$$\frac{+81}{2\sqrt{2}}$$

Örnek...16 :

$f(x)=e^{\ln\sqrt{x}}$ eğrisine üzerinde apsisi e olan noktadan çizilen teğetin x eksenine sınırladığı bölgenin alanı kaç birim karedir?

$$\frac{e\sqrt{e}}{4}$$

Örnek...17 :

$f(x)=\sqrt{4x-4}$ eğrisinin orijinden geçen teğetlerinin değme noktasının apsisi nedir?

$$(2,2)$$

Örnek...18 :

$y=x-7$ doğrusu üzerinde bulunup $y=x^2-x+5$ parabolüne en yakın noktanın koordinatları nedir?

$$\left(\frac{13}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Örnek...19 :

$f(x)=\frac{x^3}{3}+x^2-3x+1$ fonksiyonun x eksenine paralel teğetlerinin eğriye değdiği noktalar arası mesafe kaç birimdir?

$$\frac{4\sqrt{73}}{3}$$

Örnek...20 :

$f(x)=x^2-2x-8$ fonksiyonuna üzerindeki A(0,k) noktasından çizilen teğetin eksenlerle oluşturduğu üçgenin alanı kaç birim karedir?

$$16$$

Örnek...21 :

$y=x^2$ eğrisinin $x=1$ noktasındaki teğeti ve normali ile y ekseninde kalan kapalı bölgenin alanı kaç birim karedir?

$$\frac{5}{4}$$

TÜREV UYGULAMALARI – 1

(TÜREVİN GEOMETRİK YORUMU, FİZİKSEL YORUMU, DEĞİŞİM HIZI VE DEĞERLENDİRMELER)

DEĞERLENDİRME

- 1) $f(x)=x^2+ax+5$ eğrisinin x eksenini x eksenini kestiği noktalardan çizilen teğetlerin dik olması için a ne olmalıdır?

$$\pm\sqrt{21}$$

- 2) $y=f(x)=x^2-mx+4$ fonksiyonuna orijinden çizilen teğetler dikse m değeri kaçtır? $m>0$

$$\sqrt{15}$$

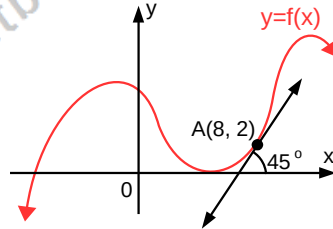
- 3) $y=f(x)=x^2+2x+7$ fonksiyonunun hangi noktadaki teğeti orijinden geçer?

$$\pm\sqrt{7}$$

- 4) $y=f(x)$ fonksiyonu ve A noktasındaki teğeti verilmiştir.

$$g(x^2)=f^2(x^3)$$

$$\text{ise } g'(4)=?$$

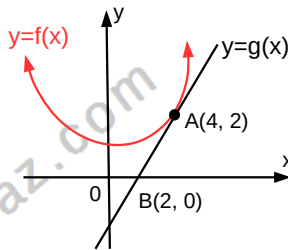


$$12$$

- 5) $y=f(x)$ parabolü ve bu parabolün A noktasındaki teğeti olan $y=g(x)$ doğrusu veriliyor.

$$h(x)=\frac{k \cdot f(x)}{g(x)+x} \text{ için}$$

$$h'(4)=1 \text{ ise } k \text{ kaçtır?}$$

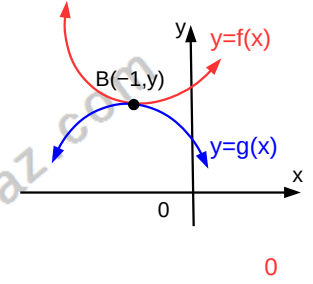


$$18$$

- 6) B noktasında teğet olan $y=f(x)$ ve $y=g(x)$ parabolleri veriliyor.

$$h(x)=\frac{f(x)}{g(x)} \text{ için}$$

$$h'(-1)=?$$



$$0$$

- 7) $f(x)=x^2+3$ fonksiyonuna orijinden çizilen teğetlerin değme noktaları arası mesafe kaç birimdir?

$$2\sqrt{3}$$

- 8) $f(x)=x^2-x$ ve $g(x)=3x-x^2$ eğrilerinin kesim noktalarından f fonksiyonuna çizilen teğetlerin arasındaki açının tanjantı kaç olabilir?

$$\pm 2$$

- 9) $y=ax^2+bx+c$ parabolüne orijinden çizilen teğetler dikse a,b,c arası hangi bağıntı vardır?

$$-1$$

TÜREV UYGULAMALARI – 1

(TÜREVİN GEOMETRİK YORUMU, FİZİKSEL YORUMU, DEĞİŞİM HIZI VE DEĞERLENDİRMELER)

- 10) $h(x)=x+\frac{4}{2x+3}$ fonksiyonunun x eksenine paralel teğetlerinin değme noktaları apsisi çarpımını kaçtır?

$$\frac{1}{4}$$

- 13) $g(x)=x^2+9$ fonksiyonuna hangi noktalardan çizilen teğetler orijinden geçer?

$$(\pm 3, 18)$$

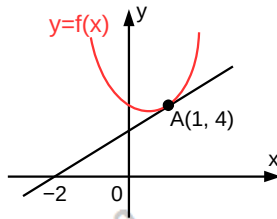
- 11) $f(x)=\frac{1}{x}$ fonksiyonun $x=1$ apsisli noktasından çizilen teğetinin eksenlerle oluşturduğu bölgenin alanı kaç birim karedir?

$$2$$

- 14) $y=x^2+4$ eğrisine $y=x$ doğrusunun en yakın noktasının apsisi kaçtır?

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{17}{4}\right)$$

- 12) $y=f(x)$ fonksiyonu ve A noktasındaki teğeti verilmiştir.
 $h(x)=x^2 \cdot f(x)$ ise h fonksiyonunun $x=1$ deki teğetinin eğimi kaçtır?



$$\frac{28}{3}$$

- 15) $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{4} + 1$ eğrisi üzerinde A(1,k) ($k>0$) noktasından çizilen teğetin eksenlerle oluşturduğu üçgenin alanı kaç birim karedir?

$$\sqrt[3]{2}=p \quad \frac{(1+p^2)^2}{p^2}$$

TÜREV UYGULAMALARI – 1

(TÜREVİN GEOMETRİK YORUMU, FİZİKSEL YORUMU, DEĞİŞİM HIZI VE DEĞERLENDİRMELER)

TÜREVİN FİZİKSEL YORUMU VE DEĞİŞİM HIZI

Bir hareketlinin t zamanında aldığı yol $S(t)$ olsun.

$t=t_1$ ve $t=t_2$ anları arasındaki ortalama

hız V_{ort} ise $V_{ort} = \frac{s(t_2)-s(t_1)}{t_2-t_1}$ dir.

Benzer şekilde $a_{ort} = \frac{v(t_2)-v(t_1)}{t_2-t_1}$

Zamana bağlı yol denkleminin birinci türevi hızı, ikinci türevi ivmeyi verir.

Yani, yolu S , hızı V ve ivmeyi a ile gösterirsek $V(t)=S'(t)$ ve $a(t)=S''(t)$ olur.

Örnek...1 :

$s(t)=2t^2+3t+5$ hareket denklemleri ile verilen cismin $t_1=2$ ve $t_2=5$ saniyeleri arasındaki ortalama hızının, $t_3=6$ anındaki hızına oranını bulunuz?

$\frac{17}{27}$

Örnek...2 :

$s(t)=t^3+4t$ hareket denklemleri ile verilen cismin $t_1=2$ ve $t_2=5$ saniyeleri arasındaki ortalama ivmesini bulunuz?

21

Örnek...3 :

$s(t)=t^5-4$ hareket denklemleri ile verilen cismin $t_1=1$ anındaki ani ivmesini bulunuz

20

Örnek...4 :

$s(t)=t^2-t+3$ konum zaman eşitliğiyle verilen bir hareketlinin ilk 2 saniyedeki ortalama hızı nedir? Anlık hız denklemini bulunuz? İki saniye arası hız farkı ne olur?

1,2t-1,2

TÜREV UYGULAMALARI – 1

(TÜREVİN GEOMETRİK YORUMU, FİZİKSEL YORUMU, DEĞİŞİM HIZI VE DEĞERLENDİRMELER)

DEĞİŞİM HIZI

f , a da diferansiyellenebiliyorsa, x a dan $a+dx$ e geçtiği zaman f deki değişim yaklaşık olarak $df=f'(a) \cdot dx$ kadar olur.

Örnek...5 :

Bir eşkenar üçgenin bir kenarı 4 cm/sn hızla büyümektedir. Bir kenar uzunluğu 12 cm olduğu anda alanının büyüme hızı kaç cm^2/sn dir?

$24\sqrt{3}$

Örnek...6 :

Bir küre ısıtılırken yarıçapı 4 cm ye ulaştığında artış hızı $0,3 \frac{\text{cm}}{\text{sn}}$ ise bu andaki hacminin değişim hızını bulunuz.

$19,2\pi$

DEĞERLENDİRME

1) $s(t)=3t^2-t+2$ hareket denklemi ile verilen cismin

- a) $t_1=1$ ve $t_2=3$ saniyeleri arasındaki ortalama hızı,
- b) $t_3=4$ anındaki anlık hızını,
- c) ivme zaman denklemini bulunuz?

11,23,6

2) Bir küpün hacmindeki artış hızı bir kenarı 6 cm olduğunda $8 \text{ cm}^3/\text{sn}$ ise aynı anda alanındaki değişim hızı nedir?

$\frac{16}{3}$

3) Bir dairenin alanının artış hızı $4 \text{ cm}^2/\text{sn}$ dir. Yarıçapı 16 cm olduğunda çevresinin artış hızı ne olur?

$\frac{1}{4}$