

TÜREV UYGULAMALARI

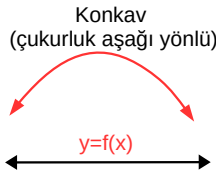
KONKAV-KONVEKS

TÜREV VE ÇUKURLUĞUN YÖNÜ

(a,b) aralığında f fonksiyonuna çizilen teğetlerin üst kısmında kalıyorsa konvektir ($y=f(x)$ fonksiyonunun grafiği çukurluğunun yönü yukarı doğru) denir.

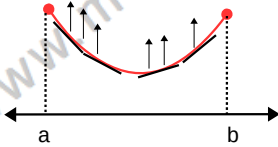


(a,b) aralığında f fonksiyonuna çizilen teğetlerin alt kısmında kalıyorsa konkavdır ($y=f(x)$ fonksiyonunun grafiği çukurluğunun yönü aşağı doğru) denir

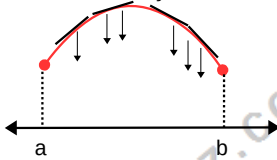


UYARI

İki kez türevlenebilir bir $y=f(x)$ fonksiyonunun grafiği y' artan ise konvektir y' artan olması için $y''>0$ olması gerektiği sonucunu çıkarırız.



y' (başka bir deyişle teğetin eğimi) azalan ise konkavdır. y' azalan olması için $y''<0$ olması gerektiği sonucunu çıkarırız.



ÖZET OLARAK

Bir fonksiyonun çukurluğunun yönünü belirleme için verilen fonksiyonun ikinci türevinin işaretini inceleriz. İkinci türev pozitifse grafik o bölgede konveks, negatifse konkavdır.

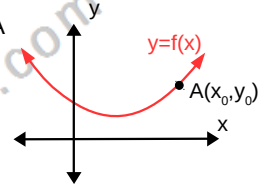
Örnek...1 :

$y=f(x)$ fonksiyonu ve üzerinde bir A noktası veriliyor. Hangileri doğrudur?

1) $f'(x_0)>0$

2) $f''(x_0)<0$

3) $f'(x_0)<0$



1,2D / 3 Y

Örnek...2 :

$y=3x^2-6x$ fonksiyonunun çukurluğunun yönünü aralıklara göre belirleyiniz.

konveks

Örnek...3 :

$y=x^3$ fonksiyonunun çukurluğunun yönünü aralıklara göre belirleyiniz.

$x<0$ konkav , $x>0$ konveks

Örnek...4 :

$f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$, $y=f(x)=ax^2+bx+c$ fonksiyonunun çukurluğunun yönünü katsayılarla göre genelleyiniz

$x<0$ a ile zıt , $x>0$ a ile aynı

TÜREV UYGULAMALARI

KONKAV-KONVEKS

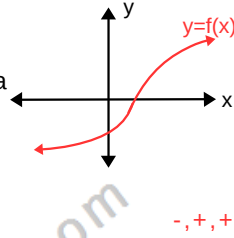
Örnek...5 :

$f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $y=f(x)=\frac{x+4}{12-x}$ fonksiyonunun
konkav ve konveks olduğu aralıkları
belirleyiniz.

$x < 12$ konveks, $x > 12$ konkav

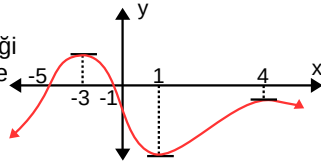
Örnek...6 :

$y=f(x)$ fonksiyonunun
grafiki veriliyor.
 $f(0), f'(0), f''(0)$ sayılarında
n hangileri pozitiftir?



Örnek...7 :

$y=f(x)$ fonksiyonunun grafiki
şekildeki gibidir. Buna göre
hangileri doğrudur?

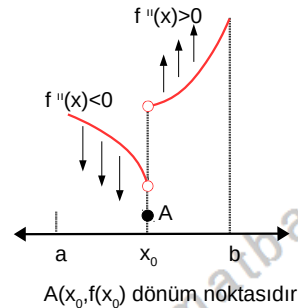
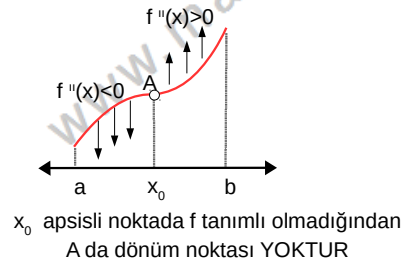
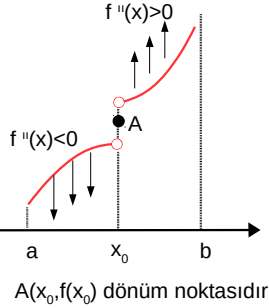
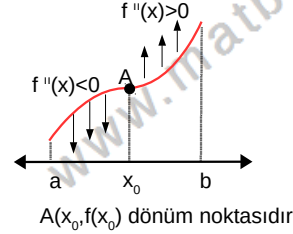


- 1) $f(-3)=0$
- 2) $f'(-2)>0$
- 3) $f''(5)<0$
- 4) $f'(1) \cdot f''(-1)>0$
- 5) $f''(4)<0$
- 6) $f'(-2) \cdot f''(-2)<0$

Y, Y, D, ?, D, Y

DÖNÜM NOKTASI

Bir fonksiyonun konvekslikten
konkavlığa veya konkavlıktan konveksliğe
geçtiği ve fonksiyonun tanımlı olduğu
nokta dönüm (büküm) noktası denir.



TÜREV UYGULAMALARI

KONKAV-KONVEKS

TEOREM

f fonksiyonunun x_0 noktasında birinci ve ikinci türevi olsun. x_0 noktası f fonksiyonun dönüm noktasının apsisi ise $f''(x_0)=0$ dir.

UYARI: f fonksiyonu için $f''(x_0)=0$ ise bu noktada dönüm noktası vardır diyemeyiz. $f''(x_0)=0$ koşuluna ek olarak ikinci türevin bu noktada işaret değiştirmesi de gerekir.

f fonksiyonu x_0 da türevi yok ise (hatta sürekli olmasa da) dönüm noktası olabilir. (yukarıdaki şekilleri inceleyiniz)

UYARI

Üçüncü dereceden bir polinom fonksiyonda, dönüm noktası fonksiyonu simetri merkezidir.

Örnek...8 :

$f(x)=x^3$ fonksiyonun dönüm noktasını bulunuz.

(0,0)

Örnek...9 :

$f(x)=x^4$ fonksiyonun dönüm noktası var ise bulunuz.

yoktur

Örnek...10 :

$f(x)=4x^6-12x^5+ax^3$ fonksiyonun dönüm noktası $(1,f(1))$ ise a yı bulunuz.

20

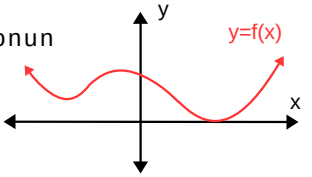
Örnek...11 :

$f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$, $y=f(x)=2x^3-ax^2+bx+3$ fonksiyonun $x=-1$ de maksimum $x=2$ de minimumu varsa dönüm noktasının apsisi nedir?

1/2

Örnek...12 :

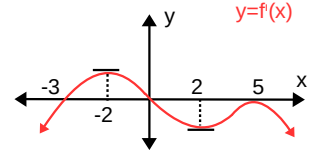
Şekilde $y=f(x)$ fonksiyonun grafiği verilmiştir. Fonksiyonun kaç tane dönüm noktası vardır?



2

Örnek...13 :

Şekilde $y=f(x)$ fonksiyonun türevinin grafiği verilmiştir. $y=f(x)$ fonksiyonun dönüm noktası apsilerinin çarpımı kaçtır?



-20

Örnek...14 :

$f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$, $y=f(x)=mx^3-nx^2+7x+m$ dönüm noktası x eksenindeyse bu noktanın apsisinin m ve n türünden ifadesi nedir?

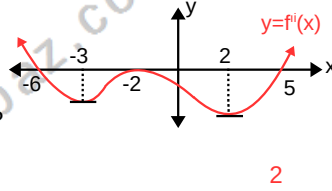
$n/3m$

TÜREV UYGULAMALARI

KONKAV-KONVEKS

Örnek...15 :

$y=f''(x)$ fonksiyonunun grafiği veriliyor buna göre $y=f(x)$ fonksiyonunun kaç dönüm noktası vardır?



2

Örnek...16 :

$f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$, $y=f(x)=x^3-bx^2+6x+a$ fonksiyonunun simetri merkezi $A(1,2)$ ise $a.b$ kaçtır?

-6

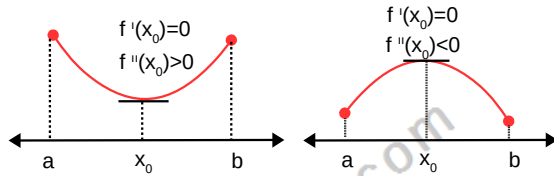
Örnek...17 :

$f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$, $y=f(x)=x|x|$ fonksiyonunun dönüm noktası var mıdır?

(0,0)

EKSTREMUM NOKTALARI VE İKİNCİ TÜREV

(a,b) aralığında iki kere türevlenebilir f fonksiyonunun x_1 ve x_2 apsisli iki ekstremum noktası var ve $f''(x_1)<0$ ise x_1 yerel maksimum, $f''(x_2)>0$ ise x_2 yerel minimum alır. Şekilleri inceleyiniz.



Örnek...18 :

$f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$, $y=f(x)=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-2x$ fonksiyonun maksimum ve minimum noktalarının apsislerini bulunuz.

$M(-2,y)$ $m(1,y)$

DEĞERLENDİRME

- 1) $y=3x^3+5x^2+7x-3^8$ fonksiyonunun konveks olduğu aralığı belirleyiniz.

$\left(-\frac{5}{9}, \infty\right)$ konveks

- 2) $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$, $y=f(x)=e^{x^2-x}$ fonksiyonunun konkav ve konveks olduğu aralıkları belirleyiniz.

Daima konveks

- 3) $f:\mathbb{R}-\{2\}\rightarrow\mathbb{R}-\{0\}$, $y=f(x)=\frac{x}{x-2}$ fonksiyonunun konkav olduğu en geniş aralığı belirleyiniz.

$(-\infty, 2)$

- 4) $f:[0,2\pi]\rightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=\sin x$ fonksiyonunun konkav olduğu en geniş aralığı belirleyiniz

$(0, \pi)$

- 5) $y=kx^3+6x^2+4x+9$ fonksiyonunun konkav olduğu en geniş aralık $(2, \infty)$ ise k değerini belirleyiniz

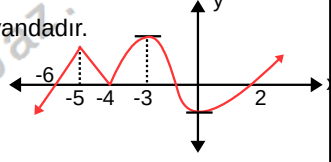
-1

TÜREV UYGULAMALARI

KONKAV-KONVEKS

6)

$y=f(x)$ fonksiyonunun grafiği yandadır. Buna göre ifadelerin doğruluğunu yanlışlığını belirtiniz.



$$f'(6) > 0$$

$$f'(-2) = 0$$

$$f''(0) < 0$$

$$f'(-3) = 0$$

$$f'(2)f''(2) > 0$$

$$f''(-3) < 0$$

$$f'(1)f''(1) < 0$$

D, Y, D, D, D, D, Y

7) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $y=f(x)=6x^3-3x+a-3$ fonksiyonun dönüm noktası x eksenini üzerindeyse a kaçtır?

3

8) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $y=f(x)=x^4+x^3$ fonksiyonunun dönüm noktalarının ordinatları arası mesafe kaç birimdir?

$$\frac{\sqrt{65}}{16}$$

9) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $y=f(x)=ax^3+2x^2+bx+a$ fonksiyonunun simetri merkezi $A(-1,4)$ ise $\frac{b}{a}$ kaçtır?

-3

10) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $y=f(x)=x^3-12x^2+4$ fonksiyonun dönüm noktasından çizilen teğetin eğimini bulunuz

$$Y=-48X+68$$