

## LİMİT - 7

( FONKSİYONLARIN SÜREKLİLİĞİ )

### LİMİT SÜREKLİLİK BÖLÜM 7

#### FONKSİYONLARDA SÜREKLİLİK

Yeni müfredat fonksiyonun tanımsız olduğu noktada sürekliliğinin araştırılmasını anlamsız olarak belirtmektedir. Dolayısıyla bir fonksiyonun bir noktada süreksizliğine karar vermek için fonksiyonun en az bir taraftan limiti ile görüntüsünün farklı olması yeterli olmaktadır.

#### BİR NOKTADA SÜREKLİLİK

$A \subset \mathbb{R}$  için  $f:A \rightarrow \mathbb{R}$  bir fonksiyon olsun.  
 $a \in A$  olmak üzere,  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$  oluyorsa

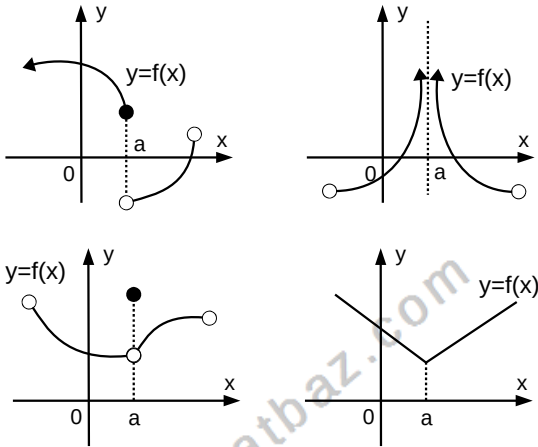
**f fonksiyonu a noktasında sürekli** denir. Bir noktada sürekli olmayan fonksiyona o noktada **süreksiz bir fonksiyon** denir.

Tanıma göre f a da sürekli ise:

- 1) f fonksiyonu a da tanımlı,
  - 2)  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  var ve
  - 3)  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$
- koşullarının üçü de gerçekleşmelidir.

#### Örnek...1 :

Grafiği aşağıdaki gibi olan fonksiyonlar  $x=a$  noktasında sürekli midir?



#### Örnek...2 :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + a & ; x \geq 3 \\ \frac{x^2 - x}{x^2 - 4} & ; x < 3 \end{cases}$$

fonksiyonu  $x=3$  noktasında sürekli ise a kaçtır?

$$\frac{-39}{5}$$

#### Örnek...3 :

$$f(x) = \begin{cases} a \cdot e^x & ; x = 0 \\ \frac{\sin x}{x} & ; x \neq 0 \end{cases}$$

fonksiyonu  $x=0$  noktasında sürekli ise a kaçtır?

1

#### Örnek...4 :

$$f(x) = \frac{\sqrt{41}}{x^3 - x}$$

fonksiyonu reel sayılar kümesinde hangi noktalarda süreksizdir?

$$\{-1, 0, 1\}$$

#### TANIM KÜMESİNDE SÜREKLİLİK

$A \subset \mathbb{R}$  ve  $f:A \rightarrow \mathbb{R}$  bir fonksiyon olsun. Her  $x \in A$  için f fonksiyonu sürekli ise f tanım kümesinde sürekli bir fonksiyondur denir. Örneğin polinom fonksiyonlar tanım kümesinde sürekli olan fonksiyonlardır.

#### SAĞDAN VE SOLDAN SÜREKLİLİK

- 1)  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$  ise f soldan sürekli
- 2)  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$  ise f sağdan sürekli

denir.

Bir fonksiyonun bir noktada sürekli olması için sağdan ve soldan sürekli olması gerekir.

## LİMİT - 7

### ( FONKSİYONLARIN SÜREKLİLİĞİ )

#### Örnek...5 :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - a & ; x < 5 \\ ax + 4 & ; x = 5 \\ (b-3)x + 4a & ; x > 5 \end{cases}$$

fonsiyonu 5 noktasında sağdan sürekli ise  $a=5b$  kaçtır?

-19

#### SÜREKSİZLİK

$I \subset \mathbb{R}$  ve  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu  $a \in \mathbb{R}$  olmak üzere  $x=a$  noktasında sürekli değil ise  $f$  fonksiyonu  $x=a$  noktasında süreksizdir denir.

#### BAZI FONKSİYONLARIN SÜREKSİZ OLDUĞU NOKTALARI BULMA

##### 1) RASYONEL FONKSİYONLAR :

$f(x) = P(x)/Q(x)$  ve  $P(x)$  ve  $Q(x)$  polinom fonksiyonlar ise  $Q(x)=0$  olduğu noktalarda  $f$  de tanımsız olacağından bu noktalarda fonksiyon süreksizdir.

#### Örnek...6 :

$f(x) = \frac{5x-3}{x^2-5x+6}$  fonksiyonun süreksiz olduğu noktaların apsileri toplamı kaçtır?

5

##### 2) İRRASYONEL FONKSİYONLAR:

$f(x) = \sqrt[n]{g(x)}$  fonksiyonu  $g(x) \geq 0$  için süreklidir.

#### Örnek...7 :

$f(x) = \sqrt[12]{2x-3}$  ve  $g(x) = \frac{x^2}{x^2-x^4}$  fonksiyonları hangi noktalarda süreklidir?

$[\frac{3}{2}, \infty) \quad \mathbb{R} - \{0, -1, 1\}$

#### 3) PARÇALI FONKSİYONLAR :

Dalları oluşturan fonksiyonlarla beraber kritik noktalarda (yani fonksiyonun kural değiştirdiği noktalarda) süreklilik olup olmadığı araştırılmalıdır.

#### Örnek...8 :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & ; x < 0 \\ \ln(x+1) & ; x = 0 \\ \frac{x}{x^2-1} & ; x > 0 \end{cases}$$

hangi noktada süreksizdir?

$\{0\}$  (Not 1 tanım kümesinde yoktur)

#### Örnek...9 :

Fonksiyonların sürekli oldukları aralıkları yazınız?

a)  $f(x) = 3x^2 - 5x + 2$       b)  $h(x) = \frac{\sin x}{2 - \cos x}$   
c)  $u(x) = \sqrt{x^2 - x - 12}$       d)  $v(x) = \sqrt[3]{x - 12}$   
e)  $t(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & ; x \leq 0 \\ \frac{x^2 - x}{x^2 - 4} & ; x > 0 \end{cases}$

$\mathbb{R}, \mathbb{R}, (-\infty, -3] \cup [4, \infty), \mathbb{R}, \mathbb{R} - \{0\}$

#### Örnek...10 :

$$t(x) = \begin{cases} \frac{x^2-9}{x-3} & ; x \neq 3 \\ \frac{m \cdot \cos(x-3)}{x^2+9} & ; x = 3 \end{cases}$$

fonsiyonu reel sayılarda sürekli ise  $m$  değeri kaçtır?

108

## LİMİT - 7

( FONKSİYONLARIN SÜREKLİLİĞİ )

### BİR NOKTADA SÜREKLİ FONKSİYONLARIN ÖZELLİKLERİ

$A \subset \mathbb{R}$  olmak üzere  $f:A \rightarrow \mathbb{R}$  ve  $g:A \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x=a \in A$  da sürekli iki fonksiyon ise  $f \pm g$   
 $f \cdot g$ ,  $\frac{f}{g}$  ve  $k \cdot f$  ( $k \in \mathbb{R}$ ) fonksiyonları da  
sürekli olur.

### KAPALI BİR ARALIKTA SÜREKLİ FONKSİYONLARIN ÖZELLİKLERİ

$f:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$  tanım kümesinde sürekli bir  
fonksiyon ise  
1)  $f$  fonksiyonu bu aralıkta sınırlıdır. Yani  
Her  $x \in \mathbb{R}$  için  $|f(x)| < B$  olacak şekilde  
 $B \in \mathbb{R}$  vardır.  
2)  $f$  fonksiyonu  $[a,b]$  aralığında  
maksimum ve minimum değerlerine  
sahiptir.  
3)  $a < x_1 < x_2 < b$  için  $f(x_1) \neq f(x_2)$  ise  
Bazı  $c \in (x_1, x_2)$  öyle ki  
 $f(c) \in (f(x_1), f(x_2))$

### Örnek...11 :

$f:[-2,1] \rightarrow \mathbb{R}$   $f(x)=x^2+3x$  fonksiyonu  $x$   
eksenini keser mi?

evet

www.matbaz.com

## LİMİT - 7

### ( FONKSİYONLARIN SÜREKLİLİĞİ )

#### DEĞERLENDİRME

- 1)  $f(x) = \sqrt{\frac{x^2 - 4x - 12}{x^2}}$   
fonksiyonunu tanımsız yapan x değerleri nedir?  
 $(-2,6) - \{0\}$

- 2)  $f(x) = \sqrt{9 - |4x - 12|}$   
fonksiyonunu sürekli yapan x değerleri nedir?  
 $\left[ \frac{3}{4}, \frac{21}{4} \right]$

- 3)  $v(x) = \sqrt[3]{\frac{x-1}{x^2-1}}$   
fonksiyonunun sürekli olduğu en büyük küme nedir?  
 $\mathbb{R} - \{-1,1\}$

- 4)  $g(x) = \log_{x-2}(\ln x)$   
fonksiyonunun sürekli olduğu en büyük küme nedir?  
 $(2, \infty) - \{3\}$

- 5)  $f(x) = 2^{\frac{x^2}{x^3-5}}$   
fonksiyonunu tanımsız yapan x değerleri nedir?  
 $\sqrt[3]{5}$

- 6)  $f(x) = \begin{cases} x^2 - a & ; & x < 3 \\ ax + b & ; & x = 3 \\ bx + 2 & ; & x > 3 \end{cases}$   
sürekli bir fonksiyonsa a ve b yi bulunuz?  
 $a = \frac{20}{11}; b = \frac{19}{11}$

- 7)  $f(x) = \begin{cases} \frac{a}{x^2-7} & ; & x < 3 \\ \frac{ax}{x+2} & ; & x = 3 \\ bx - 2 & ; & x > 3 \end{cases}$   
fonksiyonu sadece tanımsız olduğu 2 noktada  
sürekli bir fonksiyonsa a ve b yi bulunuz?  
 $a = 0; b = \frac{2}{3}$

- 8)  $g(x) = \frac{\sin x}{1 + 2 \cos x}$   
fonksiyonunu  $[0, 2\pi)$  aralığında tanımsız yapan  
x değerleri kaç tanedir?  
2

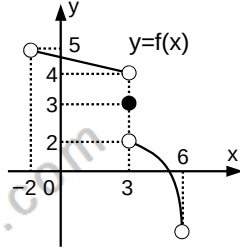
## LİMİT - 7

### ( FONKSİYONLARIN SÜREKLİLİĞİ )

- 9)  $f(x) = \sqrt{x^2 - 7x - m}$  fonksiyonu tüm reel sayılarda sürekli ise m nasıl seçilmelidir?

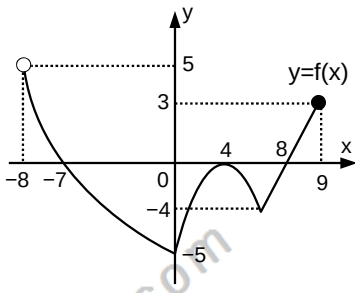
$$m < \frac{-49}{4}$$

- 10) Grafiğe göre  $f(x)$  fonksiyonu  $(-2, 6)$  aralığında sürekli olduğu x tam sayı değerleri toplamı kaçtır?



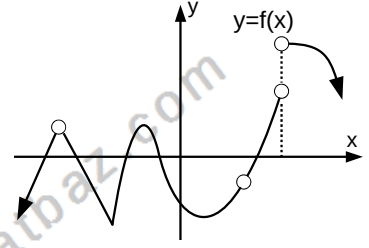
11

- 11) Grafiğe göre  $g(x) = \frac{1}{1+f(x)}$  fonksiyonu  $(-8, 9)$  aralığında kaç x reel sayı değeri için süreksizdir?



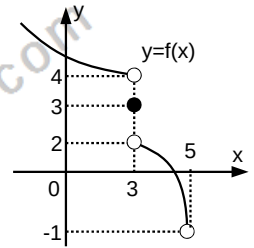
4

- 12) Grafiğe göre  $y=f(x)$  fonksiyonu reel sayılarda kaç x reel sayı değeri için süreksizdir?



3

- 13) Şekilde  $y=f(x)$  fonksiyonun grafiği veriliyor  $f(x)+g(x)$  süreklidir. Buna göre  $g(x)$  fonksiyonu nasıl bir grafiğe sahip olabilir, çiziniz?



$$g(x) = \begin{cases} 0 & ; & x < 3 \\ 1 & ; & x = 3 \\ f(x) + 2 & ; & 3 \leq x < 5 \\ -1 & ; & 5 \leq x \end{cases}$$