

LOGARİTMA - 1

ÜSTEL FONKSİYON - LOGARİTMA FONKSİYONU

Hatırlatmalar

ÜSLÜ İŞLEMLERİN ÖZELLİKLERİ

- 1) $a \neq 0$ için $a^0 = 1$ dir.
Her a reel sayısı için $a^1 = a$ dır.
 $x \neq 0$ için $0^x = 0$ dır.
 0^0 ifadesi tanımsızdır.

NEGATİF KUVVET (ÜS)

- 2) $(a)^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$ veya $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$ dir.

Örneğin; $(5)^{-2} = \left(\frac{1}{5}\right)^2$

ÇARPMA BÖLME İŞLEMİ

- 3) $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ 4) $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$
5) $\frac{a^n}{a^m} = a^{m-n}$ 6) $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$

TOPLAMA ÇIKARMA İŞLEMİ

- 7) $k \cdot a^n + m \cdot a^n - n \cdot a^n = a^n(k+m-n)$

KUVVETİN KUVVETİ

- 8) $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$ dir.
 $(a^n)^m \neq a^{(n^m)} \neq a^{n^m}$ (genellikle)

ÜSLÜ İFADE EŞİTLİĞİ

- 9) $a^n = a^m$ ise $n=m$ dir.

Örnek...1 :

$3^1 \cdot 3^2 \cdot 3^3 \cdot \dots \cdot 3^{40} = \frac{1}{81^x}$ eşitliğini sağlayan x değeri kaçtır?

Örnek...2 :

$(216)^{-\frac{1}{3}} + \left(\frac{1}{81}\right)^{-\frac{1}{4}}$ işleminin sonucu kaçtır?

Örnek...3 :

$7^{x+2} = 35^{1+x}$ olduğuna göre 25^{x+2} değeri kaç eşittir?

Örnek...4 :

$\frac{1}{1-m^n} - \frac{1}{1-m^{-n}} = 7^{a-1}$ olduğuna göre a kaç eşittir?

Örnek...5 :

$A = \underbrace{3^4 + 3^4 + 3^4 + \dots + 3^4}_{x \text{ tane}}$, $B = \underbrace{3^4 \cdot 3^4 \cdot 3^4 \cdot \dots \cdot 3^4}_{x \text{ tane}}$ ve

$\frac{B \cdot x}{A} = 27^{56}$ olduğuna göre eşitliğini sağlayan değeri kaç eşittir?

LOGARİTMA - 1

ÜSTEL FONKSİYON - LOGARİTMA FONKSİYONU

ÜSTEL FONKSİYON VE LOGARİTMA FONKSİYONU

$a^b=c$ eşitliğini düşünelim.

Mümkün olan durumlarda;

Durum 1: a ve b biliniyorsa c üs alma işlemiyle bulunabilir. Örneğin $2^5=c$ ise $c=32$ dir.

Durum 2: b ve c biliniyorsa a kök alma işlemiyle bulunabilir. Örneğin $a^2=7$ ise $a=\sqrt{7}$ dir.

Bu işlemleri daha önceden görmüştük.

Durum 3: a ve c biliniyorsa b logaritma alma işlemiyle bulunabilir. $2^b=7$ eşitliğinin çözümü logaritmayla $b=\log_2 7$ olarak elde edilir. (Bazı özel durumlarda logaritma işlemi yapmaya gerek kalmadan da çözüm bulunabilir. Örneğin $2^b=8$ gibi.)

SONUÇ

Logaritma daha önceden çözemediğimiz $a^x=b$ gibi denklemleri çözmeyen araçtır. Logaritma alma işlemi kabaca üs alma işleminin tersi olarak düşünülebilir. Logaritma alma işlemine başlamadan önce üstel fonksiyonları inceleyelim.

ÜSTEL FONKSİYON

$a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ olmak üzere, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x)=a^x$ fonksiyonuna üstel fonksiyon denir.

Örnek...6 :

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, $f(x)=2^x$ üstel fonksiyonu için $f(5)$ kaçtır?

Örnek...7 :

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, $f(x)=a^x$ üstel fonksiyonu için $f(5)=243$ tür. Buna göre, a kaçtır?

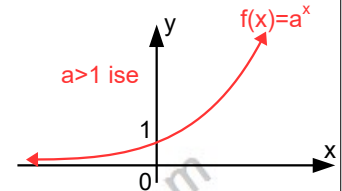
Örnek...8 :

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x)=2^x$ fonksiyonuna ait tabloyu doldurup oluşan ikililere göre grafiğini çiziniz?

| | | | | | | | |
|---|----|----|---|---|---|---|---|
| x | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| y | | | | | | | |

GENELLEME

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x)=a^x$ fonksiyonu $a > 1$ için artandır. Şekli inceleyiniz.



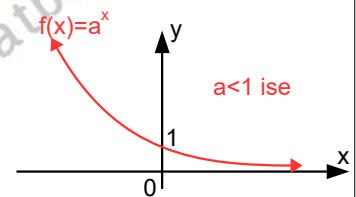
Örnek...9 :

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x)=(\frac{1}{2})^x$ fonksiyonuna ait tabloyu doldurup oluşan ikililere göre grafiğini çiziniz?

| | | | | | | | |
|---|----|----|---|---|---|---|---|
| x | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| y | | | | | | | |

GENELLEME

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, $f(x)=a^x$ fonksiyonu $0 < a < 1$ için azalandır. Şekli inceleyiniz.



LOGARİTMA - 1

ÜSTEL FONKSİYON - LOGARİTMA FONKSİYONU

ÖZET OLARAK

$a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = a^x$ üstel fonksiyonu;

1) $a > 1$ için artandır.

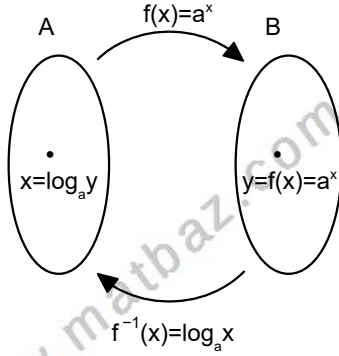
2) $0 < a < 1$ için azalandır.

3) Bire bir fonksiyondur.

4) Değer kümesi \mathbb{R}^+ alınırsa örtendir. Bundan dolayı $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, $f(x) = a^x$ için $f^{-1}(x)$ ters fonksiyonu tanımlıdır ve bu ters fonksiyona logaritma fonksiyonu denir.

LOGARİTMA FONKSİYONU

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, $f(x) = a^x$ fonksiyonunun ters fonksiyona sahip olduğunu biliyoruz. Söz konusu ters fonksiyona **logaritma** fonksiyonu denir ve $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \log_a x$ ile gösterilir. Şekli inceleyiniz.

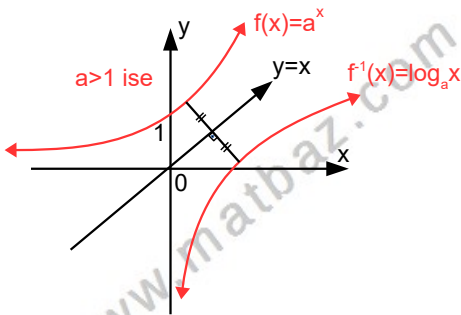


yukarıdaki eşlemeyi sembolik olarak

$y = a^x \Leftrightarrow x = \log_a y$ olarak yazabiliriz.

Örneğin uygun şartlarda tanımlı $f(x) = 2^x$ ve $g(x) = \log_2 x$ fonksiyonları birbirlerinin tersleridir.

$f(x) = a^x$ ile $g(x) = \log_a x$ fonksiyonları birbirlerinin ters fonksiyonlarıdır. Bu fonksiyonların grafikleri $y = x$ doğrusuna göre simetriktir. Şekli inceleyiniz.



UYARI 1

1) $\log_a x$ ifadesi " a tabanında x in logaritması" diye okunur.

2) $\log_a x$ yazılışı a'nın hangi kuvveti x olur şeklinde yorumlanabilir.

Örneğin $\log_2 8$ ifadesinin eşitini bulmak için **ya** 2 sayısının hangi kuvveti 8 yapar diye düşünürüz **ya da** $\log_2 8 = x$ olsun diyerek logaritma ve üstel ifadeyi birbirine bağlayan $\log_a y = x \Leftrightarrow a^x = y$ eşitliğinden yola çıkar $2^x = 8$ denklemini mümkünse çözer ve x'i buluruz. (Daha sonra logaritma özelliklerini öğrendiğimizde farklı bir düşünüşle de sonuca gidebiliriz.)

Örnek...10 :

$\log_2 x = 4$ olduğuna göre, x kaçtır?

Örnek...11 :

$\log_5 3025$ kaçtır?

Örnek...12 :

$\log_k 9 = 2$ olduğuna göre, k kaçtır?

Örnek...13 :

$\log_2 (x+5) = 7$ olduğuna göre, x kaçtır?

Örnek...14 :

$\log_4 (16) = x$ olduğuna göre, x kaçtır?

Örnek...15 :

$\log_{\sqrt{2}} (8) = x$ olduğuna göre, x kaçtır?

LOGARİTMA - 1

ÜSTEL FONKSİYON - LOGARİTMA FONKSİYONU

Örnek...16 :

$\log_{\frac{1}{25}}(125)=x$ olduğuna göre, x kaçtır?

Örnek...17 :

$\log_3 81=2x-3$ olduğuna göre, x kaçtır?

Örnek...18 :

$\log_3 1=\frac{2}{x}-3$ olduğuna göre, x kaçtır?

Örnek...19 :

$\log_5 \frac{x-1}{x-2}=-1$ olduğuna göre, x kaçtır?

Örnek...20 :

$\log_2 [3+2\log_3(x+1)]=1$ olduğuna göre, x kaçtır?

Örnek...21 :

$4^{\frac{x-2}{3}}=128$ olduğuna göre, x kaçtır?

Örnek...22 :

$5^x=8$ olduğuna göre, x kaçtır?

Örnek...23 :

$7^{x+2}=15$ olduğuna göre, x kaçtır?

Örnek...24 :

$6^{2x+5}-2=17$ olduğuna göre, x kaçtır?

Örnek...25 :

Uygun şartlarda $f(x)=5^{x+1}-2$ fonksiyonunun ters fonksiyonunu bulunuz?

Örnek...26 :

Uygun şartlarda $f(x)=3^{x-2}+4$ fonksiyonunun ters fonksiyonunu bulunuz?

Örnek...27 :

Uygun şartlarda $f(x)=7^{2x-3}+5$ fonksiyonu veriliyor. $f^{-1}(12)=?$

LOGARİTMA - 1

ÜSTEL FONKSİYON - LOGARİTMA FONKSİYONU

Örnek...28 :

$$f:(3,\infty)\rightarrow\mathbb{R}, f(x)=\log_2(x-3)$$

fonksiyonunun ters fonksiyonunu bulunuz?

Örnek...29 :

$$f:(-5,\infty)\rightarrow\mathbb{R}, f(x)=\log_2(x+5)-2$$

fonksiyonunun ters fonksiyonunu bulunuz?

Örnek...30 :

$$f:(-3,\infty)\rightarrow\mathbb{R}, f(x)=\log_2(2x+6)-2$$

fonksiyonu için $f^{-1}(4)=?$

UYARI 2

Tabanı 10 olan logaritma fonksiyonuna onluk (bayağı) logaritma fonksiyonu denir.

$f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}^+$, $f(x)=\log_{10}x$ fonksiyonu $f(x)=\log x$ ile de gösterilebilir. (Yani taban belirtilmemişse 10 alınır)

Örnek...31 :

$\log 100=x$ ise x kaçtır?

Örnek...32 :

$$\log(0,001)=2x+7 \text{ ise } x \text{ kaçtır?}$$

Tabloyu inceleyiniz.

| x | $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ | x | $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ |
|--------|--------------------------------|---------|--------------------------------|
| 1 | 2 | -2 | 4 |
| 10 | 2,5937.. | -10 | 2,8679. |
| 10^2 | 2,7048.. | -10^2 | 2,7319.. |
| 10^6 | 2,7182.. | -10^6 | 2,7182.. |

Tabanı e (Euler sayısı) değeri 2,7182.. olan irrasyonel sayı olan logaritma fonksiyonuna doğal logaritma fonksiyonu denir ve $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}^+$, $f(x)=\log_e x = \ln x$ ile gösterilir.

Örnek...33 :

$$\ln(\log x)=0 \text{ ise } x \text{ kaçtır?}$$

Örnek...34 :

$$f:\left(-\infty,\frac{4}{3}\right)\rightarrow\mathbb{R}, f(x)=\ln(4-3x)-2$$

fonksiyonunun ters fonksiyonunu bulunuz?

LOGARİTMA FONKSİYONUNUN EN GENİŞ TANIM KÜMESİ

Bir fonksiyon için en geniş tanım kümesi, fonksiyonunun bağımsız değişkeninin (genelde x) seçilebileceği en büyük kümedir.

$f(x)=\log_{h(x)}g(x)$ fonksiyonun en geniş tanım kümesi

i) $g(x)>0$ ii) $h(x)>0$ iii) $h(x)\neq 1$ ifadelerini sağlayan x değerlerinin kümesidir.

Özetlersek, taban ve logaritması alınan sayı pozitif olmalı, taban pozitifken 1 olmamalıdır.

LOGARİTMA – 1

ÜSTEL FONKSİYON – LOGARİTMA FONKSİYONU

Örnek...35 :

$f(x)=\log_2(x-2)$ fonksiyonunun en geniş tanım kümesini bulunuz?

Örnek...36 :

$f(x)=\log_{8-x}(x+5)$ fonksiyonunun en geniş tanım kümesini bulunuz?

Örnek...37 :

$f(x)=\log_{x^4}(x^2-8x+15)$ fonksiyonunun en geniş tanım kümesini bulunuz?

Örnek...38 :

$f(x)=\ln\left(\frac{x-2}{x^2-64}\right)$ fonksiyonunun en geniş tanım kümesinde kaç tane negatif tam sayı vardır?

Örnek...39 :

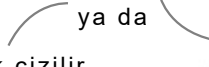
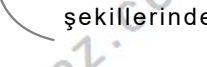
$f(x)=\log_{\sqrt{2}}(x^2-2x+m)$ fonksiyonunun en geniş tanım kümesi reel sayılar kümesi ise m nin en küçük tam sayı değeri kaçtır?

Örnek...40 :

$f(x)=\log_{\pi}(x^2+5x+m)$ fonksiyonunun en geniş tanım kümesi $\mathbb{R}-\{k\}$ kümesi ise m-k kaçtır?

Örnek...41 :

$f(x)=\log_a(mx+n)$ fonksiyonunun grafiği çizilirken

- tanım kümesi bulunur
- $mx+n=0$ için grafiğin x eksenini kestiği nokta $(x_0,0)$ bulunur
- $mx+n=a$ için grafiğin geçtiği $A(x_1,1)$ noktası bulunur
- $mx+n$ ifadesinin durumuna göre göre grafik  ya da  şekillerinden biri olarak çizilir.

Yukarıda verilenlere göre $f(x)=\log_2(x-2)$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

LOGARİTMA - 1

ÜSTEL FONKSİYON - LOGARİTMA FONKSİYONU

DEĞERLENDİRME

- 1) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, $f(x) = (a+2)^x$ üstel fonksiyonu için $f(3) = 1331$ dir. Buna göre, a kaçtır?
- 2) $\log_{\sqrt{5}}(125) = x$ ve $\log_2(x-2) = a$ ise x , a nın kaç katıdır?
- 3) $\log[8 + \log_2[3 + 2\log_3(x-1)]] = 1$ olduğuna göre, x kaçtır?
- 4) $7^{x+5} - 2 = 13$ olduğuna göre, x kaçtır?
- 5) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, $f(x) = 5^{3x+2} - 7$ fonksiyonunun ters fonksiyonunu bulunuz?
- 6) $f: (-\frac{2}{5}, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \log_2(5x+2) + 7$ fonksiyonunun ters fonksiyonunu bulunuz?
- 7) $f(x) = \log_{x^2-x+1}(x^2+6x+5)$ fonksiyonunun en geniş tanım kümesini bulunuz?
- 8) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, $f(x) = 4e^{x-2} + 3$ fonksiyonunun ters fonksiyonunu bulunuz?