

## TRİGONOMETRİ – 3

### PERİYOT VE GRAFİKLER

#### PERİYOT

Mevsimler, haftanın günleri, dünyanın güneşin etrafındaki hareketleri tekrarlanır. Bu tür olayların periyodik olarak meydana geldiğini söyleyebiliriz.

Matematikte de bazı fonksiyonların grafikleri belli aralıklarda kendilerini yinelerler. Bu tür fonksiyonlar periyodik fonksiyon olarak adlandırılır.

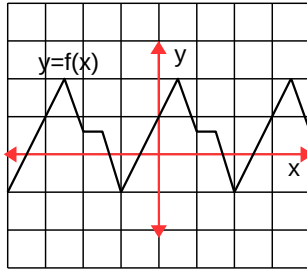
#### PERİYODİK FONKSİYONUN TANIMI

$f: A \rightarrow B$  fonksiyonunda  $A$  kümesinin her  $x \rightarrow y=f(x)$   $x$  elemanı için  $f(x+T)=f(x)$  olacak şekilde sıfırdan farklı en az bir  $T$  reel sayısı varsa,  $f$  fonksiyonuna periyodik fonksiyon,  $T$  sayısına  $f$  fonksiyonunun periyodu denir.

Bir fonksiyon birden fazla periyoda sahip olabilir. Periyodun birden fazla olması durumunda pozitif en küçük olanına **esas periyot** denir.

#### Örnek...1 :

Şekilde grafiği verilen  $y=f(x)$  fonksiyonun periyodu kaçtır?



3

#### Örnek...2 :

$f(x) = \sin x$  fonksiyonun periyodunu araştırınız.

$2\pi$

#### TRİGONOMETRİK FONKSİYONLARIN PERİYOTLARI

$k$  bir tam sayı ve  $x$  tanım kümelerinin herhangi bir elemanı olmak üzere,

$$\begin{aligned}\sin(x+k \cdot 2\pi) &= \sin x \\ \cos(x+k \cdot 2\pi) &= \cos x \\ \tan(x+k \cdot \pi) &= \tan x \\ \cot(x+k \cdot \pi) &= \cot x\end{aligned}$$

olduğundan trigonometrik fonksiyonlar periyodiktir.

#### GENELLEMELER

- $\sin x$  ve  $\cos x$  fonksiyonlarının periyodu  $k \cdot 2\pi$ ,  
 $\tan x$  ve  $\cot x$  fonksiyonlarının periyodu  $k \cdot \pi$  dir.

$\sin x$  ve  $\cos x$  fonksiyonlarının esas periyodu ( $k = 1$  için)  $2\pi$ ;  $\tan x$  ve  $\cot x$  fonksiyonlarının esas periyodu  $\pi$  dir.

- $f(x) = a + b \cdot \sin^m(px+q)$  fonksiyonlarının  
 $f(x) = a + b \cdot \cos^m(px+q)$  fonksiyonlarının

esas periyodu  $T$  ise  $T = \begin{cases} \frac{2\pi}{|p|} & ; m \text{ tekse} \\ \frac{\pi}{|p|} & ; m \text{ çiftse} \end{cases}$

- $f(x) = a + b \cdot \tan^m(px+q)$  fonksiyonlarının  
 $f(x) = a + b \cdot \cot^m(px+q)$  fonksiyonlarının periyodu  $T$  ise  $T = \frac{\pi}{|p|}$

#### Örnek...3 :

$f(x) = \sin^5(10x-2)$  fonksiyonunun periyodunu bulunuz.

$\frac{\pi}{5}$

#### Örnek...4 :

Fonksiyon	$5\cos^2(4x)$	$2-\tan^3(3x)$	$3+2\sin^7(1-5x)$	$\cot^{15}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3x}{5}\right)$
Periyot				

$\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{5}, \frac{5\pi}{3}$

## TRİGONOMETRİ – 3

### PERİYOT VE GRAFİKLER

$f(x)=g(x)\pm h(x)$  fonksiyonlarının esas periyodu,  $g(x)$  ve  $h(x)$  fonksiyonlarının esas periyotlarının en küçük ortak katına (e.k.o.k. una) eşittir. Eğer,  $f(x)=h(x).g(x)$  in esas periyodu bulunacaksa,  $f(x)$  i fonksiyonların toplamı biçiminde yazarız. Sonrada toplanan fonksiyonların esas periyotlarının en küçük ortak katı alınır.

$$\text{EKOK}\left(\frac{a}{b}, \frac{c}{d}\right) = \frac{\text{EKOK}(a, c)}{\text{EBOB}(b, d)}$$

#### Örnek...5 :

$$f(x)=2.\sin(9x+3)-3.\tan(6x-7)+5$$

fonksiyonun periyodu kaçtır?

$$\frac{2\pi}{3}$$

#### Örnek...6 :

$$f(x)=2.\cos^3(4x)+2.\cot(5x+1)$$

fonksiyonun periyodu kaçtır?

$$2\pi$$

### TRİGONOMETRİK FONKSİYONLARIN GRAFİKLERİ

Trigonometrik fonksiyonların grafikleri çizilirken,

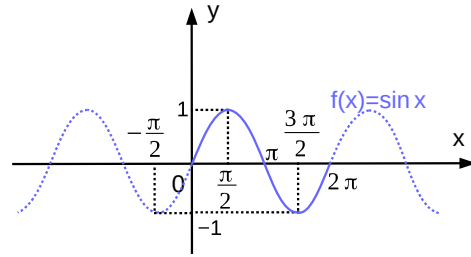
- 1) Fonksiyonun esas periyodu bulunur.
- 2) Bulunan periyoda uygun bir aralık seçilir.
- 3) Seçilen aralıkta fonksiyonun değişim tablosu yapılır. Bunun için, fonksiyonun bazı özel reel sayılarda alacağı değerlerin tablosu yapılır. Tabloda fonksiyonun aldığı değer bir sonraki aldığı değerden küçük ise (aldığı değer artmış ise) o aralığa ↗ sembolünü yazarız. Eğer, fonksiyonun aldığı değer bir sonraki aldığı değerden büyük ise (aldığı değer azalmış ise) o aralığa ↘ sembolünü yazarız.
4. Seçilen bir periyotluk aralıkta fonksiyonun grafiği çizilir. Oluşan grafik, fonksiyonun periyodu aralığında tekrarlanacağı unutulmamalıdır.

#### Örnek...7 :

$f:\mathbb{R}\rightarrow[-1,1]$  fonksiyonun grafiği çizilmiştir,  $x\rightarrow y=\sin x$  inceleyiniz.

Sinüs fonksiyonunun esas periyodu  $2\pi$  dir. Bu nedenle grafiği  $[0, 2\pi]$  aralığında inceleyerek çizeceğiz.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$\frac{3\pi}{2}$	$2\pi$
sinx	0	↗ 1	↘ 0	↙ -1	↗ 0

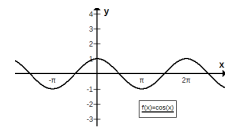


Burada dikkat edilirse  $y=f(x)=\sin x$  fonksiyonu

1. Bire bir değildir. Fakat  $f: [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$   $x\rightarrow y=\sin x$  fonksiyonu birebir ve örtendir.
2. Tek fonksiyondur.

#### Örnek...8 :

$f:\mathbb{R}\rightarrow[-1,1]$  fonksiyonun grafiğini çiziniz.  $x\rightarrow y=\cos x$

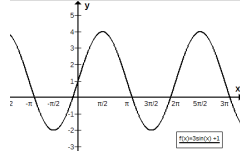


## TRİGONOMETRİ – 3

### PERİYOT VE GRAFİKLER

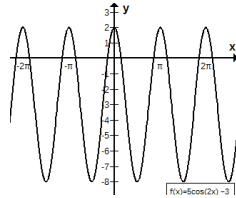
#### Örnek...9 :

$f(x) = 3 \cdot \sin x + 1$  fonksiyonun grafiğini  $[0, 4\pi]$  aralığında çiziniz.



#### Örnek...10 :

$f(x) = 5 \cos 2x - 3$  fonksiyonun grafiğini  $[0, 2\pi]$  çiziniz.



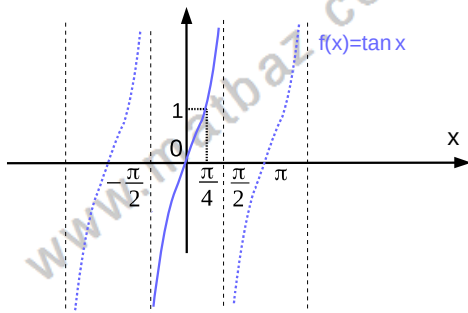
#### Örnek...11 :

$f: \mathbb{R} - \{k\pi + \frac{\pi}{2}\} \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonun grafiği çizilmiştir.

$$x \rightarrow y = \tan x$$

inceleyiniz.

x	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
tan x	$-\infty$	-1	0	1	$\infty$



Dikkat edilirse  $y = \tan x$  fonksiyonu

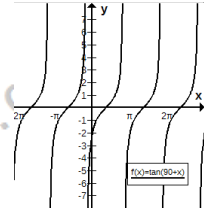
1. Tek fonksiyondur ama bire bir değildir.

2.  $f: (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu birebir ve  
 $x \rightarrow y = \tan x$   
örtendir.

#### Örnek...12 :

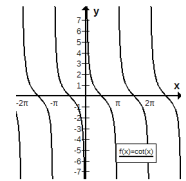
$f: (-3\pi, +3\pi) \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \rightarrow y = \tan(x + \frac{\pi}{2})$  fonksiyonun grafiğini çiziniz.

(Tanımlı olduğu değerler için)



#### Örnek...13 :

$f: \mathbb{R} - \{k\pi\} \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonun grafiğini çiziniz.  
 $x \rightarrow y = \cot x$

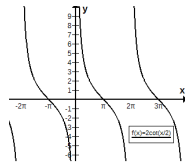


## TRİGONOMETRİ – 3

### PERİYOT VE GRAFİKLER

#### Örnek...14 :

$f: (0, 3\pi) \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \rightarrow y = 2 \cot \frac{x}{2}$  fonksiyonun grafiğini çiziniz.



#### DEĞERLENDİRME

- 1)  $f(x) = 7 - 4 \sin^3(5x+1) - 3 \cos^2(3-4x)$  fonksiyonun periyodu kaçtır?

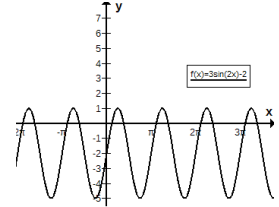
2π

- 2)  $f(x) = 7 \sin^4(5x+10)$ ,  $g(x) = 3 \cot^2(3mx-4x+9)$  fonksiyonlarının periyodları eşitse m kaç olabilir?

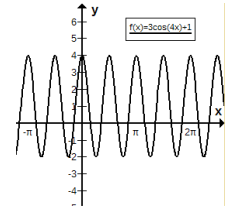
$\frac{-1}{3}$  veya 3

- 3)  $y = f(x) = a \sin(bx+c) + k$  türündeki fonksiyonların grafiklerini katsayıları ile ilişkilendiriniz.

- 4)  $f(x) = 3 \sin x - 2$  fonksiyonun grafiğini  $[0, 4\pi]$  çiziniz.



- 5)  $f(x) = 3 \cos 4x + 1$  fonksiyonun grafiğini  $[0, \pi]$  çiziniz.



- 6)  $f(x) = \tan 4x + 1$  fonksiyonun grafiğini  $[0, \pi]$  çiziniz. (tanımlı olduğu değerler için)

