

DENKLEM VE EŞİTSİZLİKLER -3

EŞİTSİZLİKLER

$f(x) \leq 0$, $f(x) \geq 0$, $f(x) > 0$, $f(x) < 0$ ifadelerine eşitsizlikler denir.

Örnek...1:

$3x-8 < 0$ eşitsizliğini çözünüz. $f(x)=3x-8$ fonksiyonunun işaretini x değişkeninin değişimine göre inceleyiniz.

$$3x-8=0 \quad x=8/3$$

x	$-\infty$	$8/3$	$+\infty$
$3x-8$	$-$	0	$+$

$x < 8/3$

$G = (-\infty, 8/3)$

Birinci dereceden doğrusal eşitsizlikler dışındaki eşitsizlikleri çözmek için verilen ifadenin işaretini işaret tablosu dediğimiz tabloda özetleriz.

$f(x)=ax^2+bx+c$ İFADESİNİN İŞARETİ

durum 1 $ax^2+bx+c=0$, $b^2-4ac < 0$

x	$-\infty$	$+\infty$
ax^2+bx+c	a 'nın işareti	a 'nın işareti

Örnek...2:

$x^2+2x+10$ ifadesinin işaretini inceleyiniz

$$\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10 < 0$$

x	$-\infty$	$+\infty$
$x^2+2x+10$	$+$	$+$

durum 2 $ax^2+bx+c=0$, $b^2-4ac=0$

x	$-\infty$	$x_1=x_2$	$+\infty$
a 'nın işareti	a 'nın işareti	0	a 'nın işareti

Örnek...3:

x^2+6x+9 ifadesinin işaretini inceleyiniz

$$(x+3)^2=0 \rightarrow x=-3$$

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
$(x+3)^2$	$+$	0	$+$

durum 3 $ax^2+bx+c=0$, $b^2-4ac > 0$

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
a 'nın işareti	a 'nın işareti	a 'nın işareti	a 'nın işareti	a 'nın işareti

Örnek...4:

x^2-x-12 ifadesinin işaretini inceleyiniz

$$(x-4)(x+3)=0 \rightarrow x=4 \quad x=-3$$

x	$-\infty$	-3	4	$+\infty$
x^2-x-12	$+$	0	$-$	$+$

EŞİTSİZLİKLER

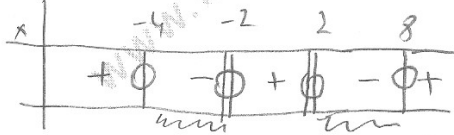
DENKLEM VE EŞİTSİZLİKLER -3

EŞİTSİZLİKLER

Örnek...9 :

$\frac{(x^2-4x-32)}{(x^2-4)} \leq 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz

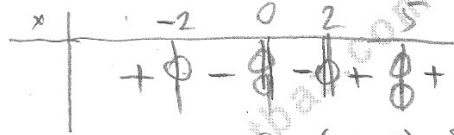
$\frac{(x-8)(x+4)}{(x-2)(x+2)}$ 8, -4, 2, -2



Örnek...10 :

$\frac{(x-5)^4(x+2)^{13}}{(x-2)^3 \cdot x^2} < 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz

$x=5$ çift, $x=0$ çift, $x=-2$ tek, $x=2$ çift

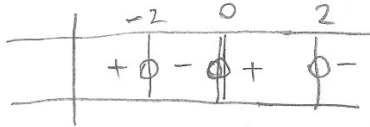


$G = (-2, 2) - \{0\}$

Örnek...11 :

$\frac{2}{x} \leq \frac{x}{2}$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz

$\frac{2}{x} - \frac{x}{2} \leq 0 \Rightarrow \frac{4-x^2}{2x} \leq 0 \Rightarrow x = \pm 2, 0$



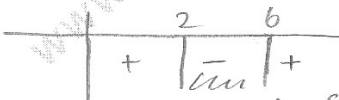
$G = [-2, 0) \cup [2, \infty)$

Örnek...12 :

$|x-5| \cdot (x^2-8x+12) < 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz

$|x+5|$ tablosu, $x=-5$ unutulmaz!

$x^2-8x+12 = (x-6)(x-2)$



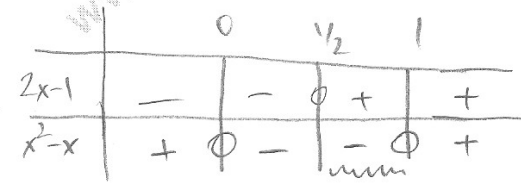
$G = (2, 6) - \{5\}$

Birden fazla eşitsizliğin oluşturduğu sisteme eşitsizlik sistemi denir. Eşitsizlik sistemleri çözülürken bir tabloda işaretinin incelenmesi gerekli görülen ifadeleri içerecek kadar satır yapılır

Örnek...13 :

$2x-1 > 0$ eşitsizlik sisteminin çözüm kümesini bulunuz

$x^2-x < 0$ 1/2, 1, 0

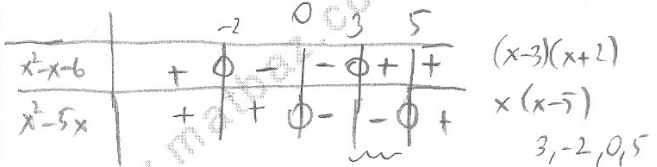


$G = (\frac{1}{2}, 1)$

Örnek...14 :

$x^2-x-6 > 0$ eşitsizlik sisteminin çözüm kümesini bulunuz

$x^2-5x < 0$ -2, 0, 3, 5



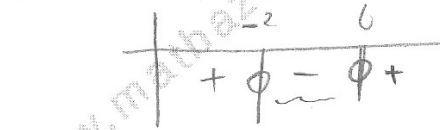
$G = (3, 5)$

Örnek...15 :

$-9 \leq x^2-4x-5 < 7$ eşitsizliğini sağlayan tamsayıların toplamı kaçtır?

$x^2-4x+4 \geq 0 \rightarrow G_1 = \mathbb{R} \quad (x-2)^2 \geq 0$

$x^2-4x-12 < 0 \rightarrow G_2 = (-2, 6)$ kökler



$G = (-2, 6)$

DENKLEM VE EŞİTSİZLİKLER -3

EŞİTSİZLİKLER

Örnek...16 :

a ve b birer reel sayı olmak üzere $\frac{ax-b}{x-a} \leq 0$ eşitsizliğinin en geniş çözüm aralığı $[3,5]$ ise a.b kaçtır?

$$x_1 = b/2 \quad x_2 = a \quad b/2 = 3$$

$$a = 5 \Rightarrow b = 15$$

$$a \cdot b = 75$$

İKİNCİ DERECEDEKİ DENKLEMİN KÖKLERİ

$$ax^2+bx+c=0$$

$$b^2-4ac>0$$

Farklı iki kök var

$$b^2-4ac<0$$

Gerçek kök yok

$$b^2-4ac=0$$

Eşit iki kök var

durum1. $x_1, x_2 > 0$

- a. $x_1+x_2 > 0 \Rightarrow 0 < x_1 < x_2$
b. $x_1+x_2 < 0 \Rightarrow x_1 < x_2 < 0$

durum2. $x_1, x_2 < 0$

$$x_1 < 0 < x_2$$

- a. $x_1+x_2 > 0 \Rightarrow |x_1| < |x_2|$
b. $x_1+x_2 < 0 \Rightarrow |x_1| > |x_2|$
c. $x_1+x_2 = 0 \Rightarrow |x_1| = |x_2|$

durum3. $x_1, x_2 = 0$

- a. $x_1+x_2 > 0 \Rightarrow x_1=0 < x_2$
b. $x_1+x_2 < 0 \Rightarrow x_1=0 > x_2$
c. $x_1+x_2 = 0 \Rightarrow x_1=0=x_2$

Örnek...17 :

$mx^2-(2m-3)x+m+2=0$ denkleminin reel kökü yoksa m nasıl seçilmelidir?

$$\Delta < 0 \quad (2m-3)^2 - 4 \cdot m \cdot (m+2)$$

$$4m^2 - 12m + 9 - 4m^2 - 8m$$

$$-20m + 9 < 0$$

$$m > 9/20$$

Örnek...18 :

$(m+2)x^2+4x+m-3=0$ denkleminin köklerinin zıt işaretli olması için m nasıl seçilmelidir?
($x_1 < 0 < x_2$)

$$\Delta > 0, \frac{c}{a} < 0 \quad (\Delta \text{ gerekir})$$

$$\frac{m-3}{m+2} < 0$$

$$\begin{array}{c|cc} & -2 & 3 \\ \hline & + & - \\ \hline & \text{m} & \in (-2, 3) \end{array}$$

Örnek...19 :

$(m+2)x^2+(m+3)x+1=0$ denkleminin köklerinin pozitif işaretli olması için m nasıl seçilmelidir?

$$\Delta > 0 \quad x_1+x_2 > 0 \quad x_1 \cdot x_2 > 0$$

$$(m+3)^2 - 4 \cdot (m+2) > 0 \quad m^2 + 2m + 1 > 0$$

$$-\frac{(m+3)}{m+2} > 0 \rightarrow \frac{m+3}{m+2} < 0$$

$$\frac{1}{m+2} > 0$$

$$\begin{array}{c|cc} & -3 & -2 \\ \hline \frac{m+3}{m+2} & + & - \\ \hline \frac{1}{m+2} & - & + \end{array}$$

Örnek...20 :

$x^2-(p+2)x+p+4=0$ denkleminin köklerinin negatif işaretli olması için p nasıl seçilmelidir?

$$\Delta > 0 \quad x_1+x_2 < 0 \quad x_1 \cdot x_2 > 0$$

$$(p+2)^2 - 4 \cdot (p+4) > 0 \rightarrow p^2 - 12 > 0$$

$$p+2 < 0 \rightarrow p < -2 \quad (\text{köşül 2})$$

$$p+4 > 0$$

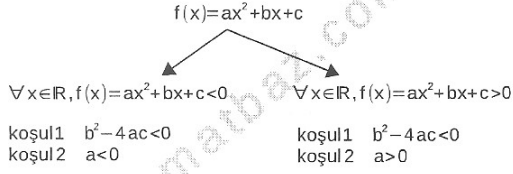
$$p > -4$$

$$(\text{köşül 3})$$

$$\begin{array}{c|cc} & -2\sqrt{3} & 2\sqrt{3} \\ \hline p^2-12 & + & - \\ \hline \end{array}$$

$$\mathcal{C} = (-4, -2\sqrt{3})$$

F(X)=AX²+BX+C NİN İŞARETİ



Örnek...21 :

Her x reel sayısı için $x^2-(m-1)x+m+2 > 0$ oluyorsa m hangi aralıktadır?

$$a=1 > 0 \quad (\text{koşul 1})$$

$$\Delta < 0 = (m-1)^2 - 4 \cdot (m+2) < 0 \quad (\text{koşul 2})$$

$$m^2 - 6m - 7 < 0 \quad (m-7)(m+1)$$

m	-1	7
m^2-6m-7	+	+
	$-$	
	$(-1, 7)$	

Örnek...22 :

$(a-3)x^2-12x-3$ ifadesi daima -6 dan büyüğe a nasıl seçilmelidir?

$$(a-3)x^2-12x-3 > -6$$

$$(a-3)x^2-12x+3 > 0$$

$$\text{koşul 1} \quad a-3 > 0 \rightarrow a > 3 \quad (1)$$

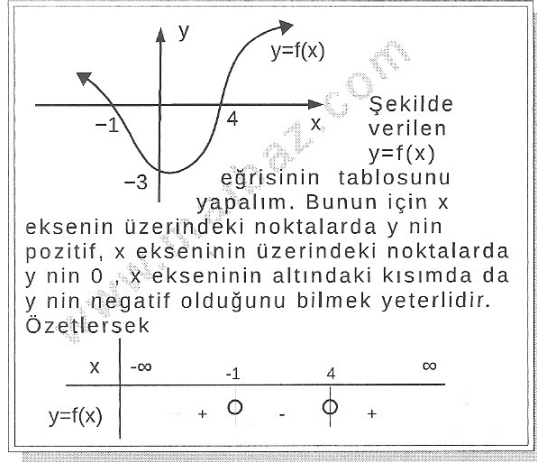
$$\text{koşul 2} \quad \Delta < 0 \rightarrow 12^2 - 4 \cdot (a-3) \cdot 3 < 0$$

$$144 - 12a + 36 < 0$$

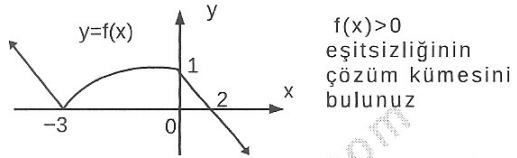
$$180 < 12a$$

$$15 < a \quad (2)$$

$$(1) \text{ ve } (2) \text{ den } a > 15$$



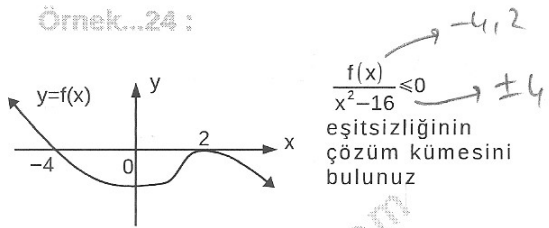
Örnek...23 :



	-3	2
x	+	-

$$(-\infty, 2) - \{-3\}$$

Örnek...24 :



	-4	2	4
f(x)	+	0	-
x^2-16	+	0	-
$\frac{f(x)}{x^2-16}$	+	+	-

$G = (4, \infty) \cup \{2\}$

DEĞERLENDİRME

- 1) $a < 0 < b < c$ olmak üzere $\frac{(ax-1)(bx-1)}{(cx-1)} < 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz

$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{6}$

$+$ $-$ $+$ $-$

$$G = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{c} \right) \cup \left(\frac{1}{b}, 0 \right)$$

- 2) $\begin{cases} x^3 - 4x > 0 \\ x^2 - x < 6 \end{cases}$ eşitsizlik sisteminin çözüm kümesini bulunuz $\rightarrow x^2 - x - 6 < 0$

$$\begin{array}{ll} x(x^2-4) > 0 & 0, \pm 2 \\ (x-3)(x+2) < 0 & -2, 3 \end{array}$$

	-2	0	2	3
$x(x-4)$	-	+	-	+
$(x-3)(x+2)$	+	-	-	+

$(-2, 0) \cup (2, 3)$

- 3) $x^2 - (m-1)x + m + 2$ ifadesi x in reel sayı değerleri için daima pozitif oluyorsa m hangi aralıktadır?

$$a = 1 > 0$$

$\Delta < 0$

$$(m+1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (m+2) < 0$$

$$m^2 - 6m - 7 < 0$$

$$(m-7)(m+1) < 0$$

$$m \in (-1, 7)$$

- 4) $a \neq 0$ olmak üzere $ax^2 - 3x - a = 0$ denklemi için hangileri doğru olabilir?

1. eşit iki kök vardır
2. iki pozitif kök vardır
3. köklerden biri sıfırdır
4. aynı işaretli iki kök vardır
5. zıt işaretli iki kök vardır

$$\Delta = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2) = 9 + 16 = 25 > 0$$

$$x_1 + x_2 = 3/2 \quad x_1 \cdot x_2 = -1$$

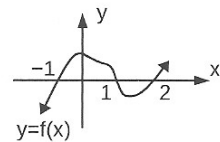
zit karetti: iki kök vardır.

- 5) $x^2 + (k+2)x - k - 6 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 dir. $x_1 < 0 < x_2$ ve $|x_1| < |x_2|$ ise k nın en geniş değer aralığı nedir?

$$\begin{array}{lcl} \Delta > 0 & x_1, x_2 < 0 & x_1 + x_2 > 0 \\ \downarrow & \swarrow & \\ \text{gesucht: } z & -k-6 < 0 & -k-2 > 0 \\ & k > -6 & k < -2 \\ & -6 < k < -2 & \end{array}$$

$$\underline{u \in (-b, -2)}$$

- 6) $\frac{(x+2)f(x)}{3^{x-4}|x-2|(x^3+1)} \leq 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz



	-1	1	2
$f(x)$	-	0	+
$g(x)$	-	0	+
$f(x) \cdot g(x)$	+	+	+

$$Q = (-1, 2)$$