

FONKSİYONLARDA UYGULAMALAR-2

PARABOL

PARABOL

$a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$ olmak koşuluyla $f(x) = ax^2 + bx + c$ fonksiyonuna ikinci dereceden bir değişkenli fonksiyon ve bu fonksiyonun belirttiği eğriye de parabol denir.

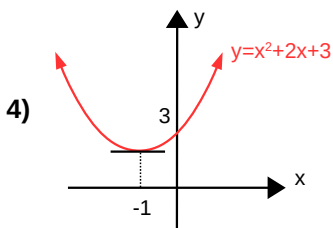
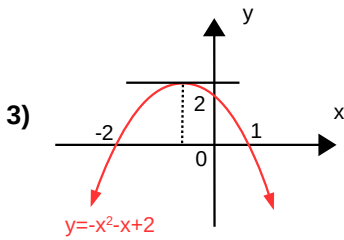
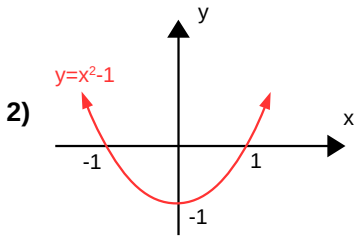
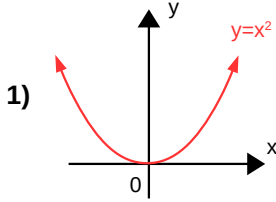
Örnek...1 :

$f(x) = 2x^2 - 5x + 6$ parabolü $K(2, p)$ noktasından geçiyorsa p kaçtır?

$$f(2) = p \Rightarrow 8 - 10 + 6 = p \rightarrow p = 8$$

Örnek...2 :

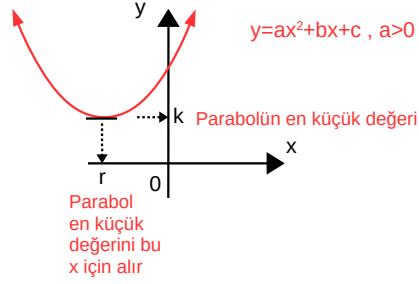
Aşağıda çeşitli parabol grafikleri verilmiştir inceleyiniz.



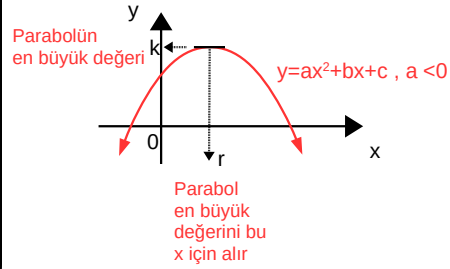
Uyarı

Bir parabolün grafiği başkatsayı olan a sayısına bağlı olarak iki şekilde olabilir.

$a > 0$ için kollar yukarı ve parabol bir en küçük değere (minimum) sahip,



$a < 0$ için kollar aşağı ve parabol bir en büyük değere (maksimum) sahiptir



Her iki durumda da elde edilen ekstremum (yani en küçük veya en büyük değer) tepe noktası denilen noktada elde edilir. (Tanım kümesi tüm reel sayılar)

Tepe noktası, apsisi $x = r = \frac{-b}{2a}$ olan $T(r, f(r))$ olan noktadır.

$x = r$ doğrusuna simetri eksenini de denir.

Burada $f(r)$ değeri $a > 0$ için parabolde x 'e verilebilecek tüm değerler için en büyük görüntü değeridir. (benzer şekilde $a < 0$ en küçük görüntü değeridir.)

FONKSİYONLARDA UYGULAMALAR-2

PARABOL

Örnek...3 :

Aşağıda reel sayılarda tanımlanmış fonksiyonlar verilmiştir. Fonksiyonların tepe noktalarını bulunuz ve bulduğunuz değer en büyük mü en küçük mü olduğunu belirtiniz

$$1) f(x) = x^2 - 4x + 6$$

$$r = \frac{-b}{2a} = \frac{4}{2} = 2 \quad (2, 2) \rightarrow \text{min}$$

$$k = f(2) = 4 - 8 + 6 \rightarrow 2$$

$$2) f(x) = 2x^2 - 8x + 1$$

$$r = \frac{8}{2 \cdot 2} = 2 \quad (2, -7) \rightarrow \text{min}$$

$$k = f(2) = 2 \cdot 2^2 - 8 \cdot 2 + 1 = -7$$

$$3) f(x) = x + 6 - x^2$$

$$r = \frac{-b}{2a} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2} \quad (\frac{1}{2}, \frac{25}{4}) \rightarrow \text{max}$$

$$f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} + 6 - \frac{1}{4} = \frac{25}{4}$$

Örnek...4 :

$f(x) = 24x + 8 - mx^2$ fonksiyonunun simetri eksenini $x=2$ doğrusu ise m kaçtır?

$$r = \frac{-b}{2a} = \frac{-24}{-2m} = 2 \rightarrow \underline{m=6}$$

Örnek...5 :

$f(x) = 2x^2 - 12x + p$ fonksiyonunun en küçük değeri -4 ise p kaçtır?

$$k = -4 \quad r = \frac{-b}{2a} = \frac{12}{2 \cdot 2} = 3$$

$$f(3) = 18 - 36 + p = -4$$

$$p = 14$$

Örnek...6 :

$f(x) = x^2 - (k-2)x + k - 23$ fonksiyonunun tepe noktası Oy eksenindeyse bu parabolün en küçük değeri kaçtır?

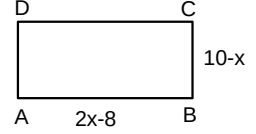
$$r = 0 \quad k = 2 \Rightarrow f(x) = x^2 - 21$$

$$T(0, -21) \quad \text{min} = -21$$

$$f(0)$$

Örnek...7 :

Şekilde bir kenarı $2x-8$, diğer kenarı $10-x$ olan dikdörtgen veriliyor. Bu dikdörtgenin alanı en çok kaç birim karedir?



$$A = (2x-8)(10-x) = -2x^2 + 28x - 80 \rightarrow r = 7$$

$$k = A(7) = 6 \cdot 3 = 18$$

Örnek...8 :

Türk lirası olarak x alış ve y satış fiyatına sahip bir malın satış ve alış fiyatı arasında $y = 13x - x^2 - 20$ bağıntısı vardır. Bu alışverişte kar en fazla kaç TL olur?

$$k \hat{=} r = \text{satış} - \text{malîyet}$$

$$= 13x - x^2 - 20 - x$$

$$= -x^2 + 12x - 20$$

$$r = \frac{-12}{-2} = 6$$

$$k = f(6) = -6^2 + 12 \cdot 6 - 20 = 16$$

PARABOLÜN GRAFİĞİ

Bir parabol grafiği daima y eksenini keser. Bu nokta için $x=0$ verilerek ordinat elde edilir.

Grafiğin x eksenini kesme durumu $y = ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin çözüm kümesine bağlıdır.

Örnek...9 :

$f(x) = x^2 - 7x + 12$ fonksiyonunun eksenleri kestiği noktaları bulunuz.

x	y
0	12
4	0
3	0

$$x^2 - 7x + 12 = 0$$

$$(x-4)(x-3) = 0$$

$$(0, 12) \quad (4, 0) \quad (3, 0)$$

\downarrow y kesim x kesimler

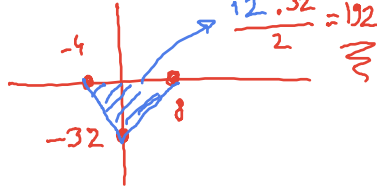
FONKSİYONLARDA UYGULAMALAR-2

PARABOL

Örnek...10 : $x^2 - 4x - 32 = (x-8)(x+4)$

$f(x) = x^2 - 4x - 32$ fonksiyonunun eksenleri kestiği noktaları köşe kabul eden üçgenin alanı kaç birim karedir?

$$\begin{array}{r|l} x & y \\ 0 & -32 \\ 8 & 0 \\ -4 & 0 \end{array}$$



Örnek...11 :

$f(x) = x^2 - 4x + m$ fonksiyonunun x eksenini kestiği noktalar arasındaki mesafe 5 birim olduğuna göre, m kaçtır?

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 5 \\ x_1 + x_2 &= 4 \\ x_1 &= \frac{9}{2} \\ x_2 &= -\frac{1}{2} \\ m &= x_1 \cdot x_2 = -\frac{9}{4} \end{aligned}$$

İkinci Yol

$$\begin{aligned} \left(\frac{9}{2}\right)^2 - 4 \cdot \frac{9}{2} + m &= 0 \\ m &= -\frac{9}{4} \end{aligned}$$

Örnek...12 :

$f(x) = mx^2 - 4x + 2$ fonksiyonunun Ox eksenine teğet olması için m kaç olmalıdır?

$$\Delta = 0 \quad 16 - 4m \cdot 2 = 0 \rightarrow m = \frac{2}{1}$$

Örnek...13 :

$f(x) = (p-2)x^2 - 4x + p + 2$ fonksiyonunun Ox eksenine negatif tarafta teğet olması için p kaç olmalıdır?

$$\Delta = 0 \wedge r < 0$$

$$16 - 4 \cdot (p-2) \cdot (p+2) = 0$$

$$p^2 - 4 = 4$$

$$p^2 = 8$$

$$p = \pm 2\sqrt{2}$$

$$r = \frac{4}{2(p-2)} < 0$$

$$p < 2$$

$$p = -2\sqrt{2}$$

$y = ax^2 + bx + c$ Parabolünün Çizimi

1. Grafik y eksenini (0, c) noktasında keser
2. $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ parabolünde $\Delta = b^2 - 4ac$ olmak üzere a) $\Delta > 0$ için parabol x eksenini 2 farklı noktada keser
b) $\Delta < 0$ için parabol x eksenini kesmez
c) $\Delta = 0$ için parabol x eksene teğettir.

3. Grafik $x = r = \frac{-b}{2a}$ dan geçen doğruya göre simetrik olup T(r, k) için a'nın durumuna göre en büyük veya en küçük değerini alır

4. Grafik eksenleri kestiği nokta(lar) ve tepe noktasından geçecek biçimde çizilir. ($a > 0$ için kollar yukarı $a < 0$ için kollar aşağı yönlü)

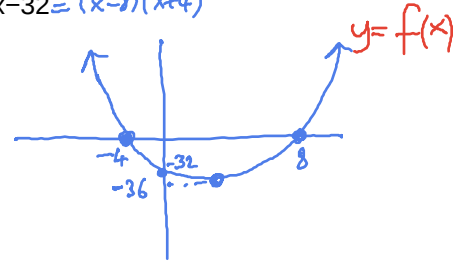
Sınırlı aralıkta tanımlı paraboller çizilirken önce parabolün tamamını çizer sonra istenmeyen kısmı atarız.

Örnek...14 :

Parabolleri reel sayılarda tanımlı olarak çiziniz

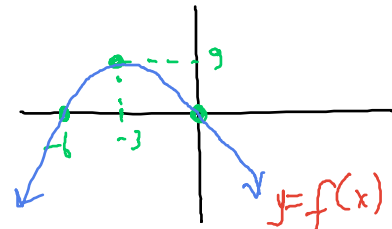
1) $y = f(x) = x^2 - 4x - 32 = (x-8)(x+4)$

$$\begin{array}{r|l} x & y \\ 0 & -32 \\ -4 & 0 \\ 8 & 0 \\ 2 & -36 \end{array}$$



2) $y = -x^2 - 6x$

$$\begin{array}{r|l} x & y \\ 0 & 0 \\ -6 & 0 \\ -3 & 9 \end{array}$$

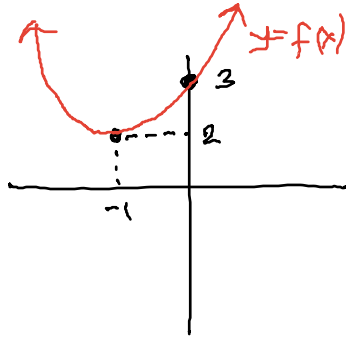


FONKSİYONLARDA UYGULAMALAR-2

PARABOL

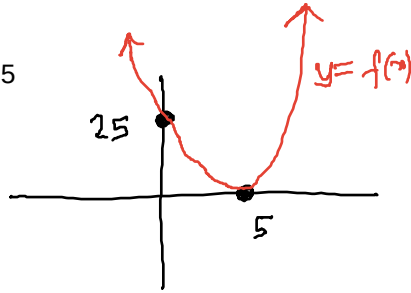
3) $y = x^2 + 2x + 3$

x	y
0	3
?	0
-1	2



4) $y = x^2 - 10x + 25$

x	y
0	25
5	0

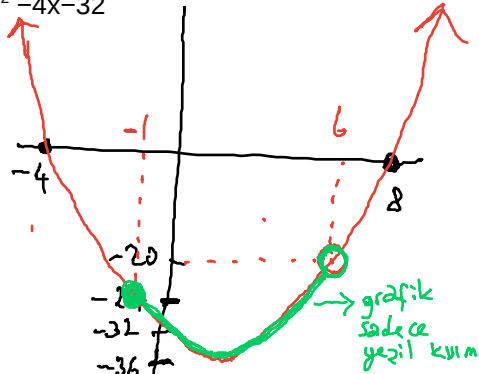


Örnek...15 :

Fonksiyonları tanım kümesi $[-1, 6)$ olarak çiziniz

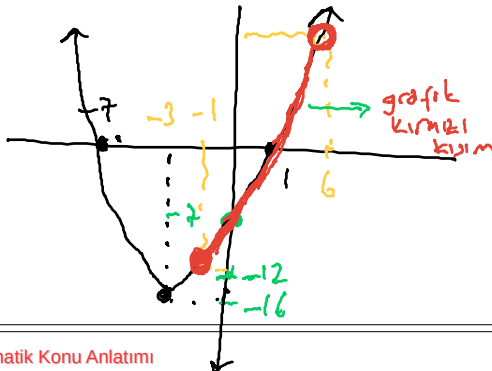
1) $f(x) = x^2 - 4x - 32$

x	y
0	-32
8	0
-4	0
-1	-27
6	-20
2	-36



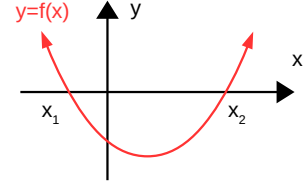
2) $f(x) = x^2 + 6x - 7 = (x+9)(x-1)$

x	y
0	-7
-1	0
-7	0
-3	-16
-1	-12
6	65



GRAFIĞİ VERİLEN PARABOLÜN DENKLEMİNİN BULUNMASI

A) x eksenini kestiği noktaları bilinen parabol

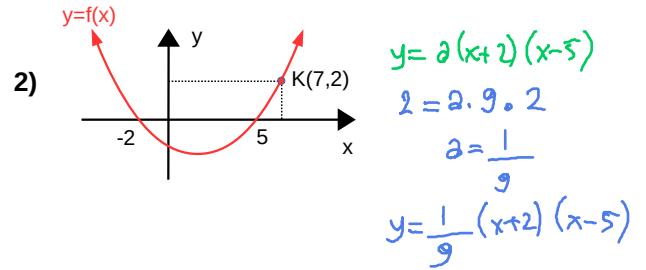
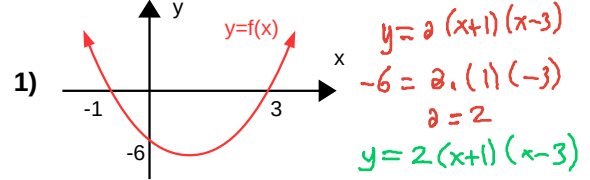


Şekildeki parabolün denklemi

$y = f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ olarak ifade edilebilir. Burada a'yı bulmak için daha önceki noktalardan farklı bir nokta kullanırız.

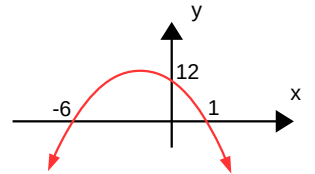
Örnek...16 :

Parabollerin denklemlerini oluşturunuz



Örnek...17 :

Şekildeki parabol x eksenini $A(-6, 0)$ ve $B(1, 0)$ noktalarında C eksenini ise $C(0, 12)$ noktasında kesiyor. Parabolün tepe noktasını bulunuz?



$$y = a(x+6)(x-1)$$

$$12 = a \cdot 6 \cdot (-1)$$

$$a = -2$$

$$f(x) = -2(x+6)(x-1) \quad r = -\frac{5}{2}$$

$$k = f(r) = f\left(-\frac{5}{2}\right) = -2 \cdot \frac{7}{2} \cdot \frac{7}{2}$$

$$= \frac{49}{2} \quad 4/8$$

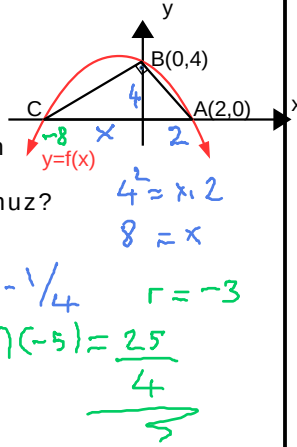
$$T\left(-\frac{5}{2}, \frac{49}{2}\right)$$

FONKSİYONLARDA UYGULAMALAR-2

PARABOL

Örnek...18 :

Şekildeki parabol x eksenini A(2,0) ve C, y eksenini ise B(0,4) noktalarında kesiyor. ABC dik üçgendir. Fonksiyonun görüntü kümesindeki en büyük sayıyı bulunuz?

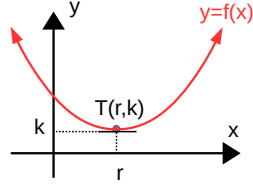


B) Tepe Noktası verilen parabolün denklemi

Şekildeki parabolün denklemi

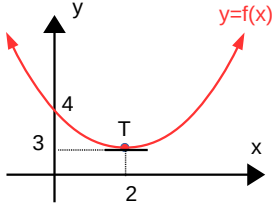
$y=f(x)=a(x-r)^2+k$ olarak ifade edilebilir.

Burada a'yı bulmak için daha önceki noktalardan farklı bir nokta kullanırız.



Örnek...19 :

Tepe noktası T(2,3) olan ve y eksenini L(0,4) noktasında kesen parabolün denklemini bulunuz



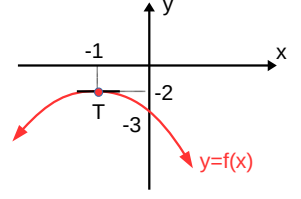
$$y = a(x-2)^2 + 3$$

$$4 = 4a + 3 \rightarrow a = 1/4$$

$$f(x) = \frac{1}{4}(x-2)^2 + 3$$

Örnek...20 :

Tepe noktası T(-1,-2) olan ve y eksenini R(0,-3) noktasında kesen parabolün denklemi $f(x)=ax^2+bx+c$ olduğuna göre, a+b+c değerini bulunuz



$$y = a(x+1)^2 - 2$$

$$-3 = a - 2 \rightarrow a = -1$$

$$y = f(x) = -(x+1)^2 - 2$$

İstenen $a+b+c = f(1) = -(1+1)^2 - 2$

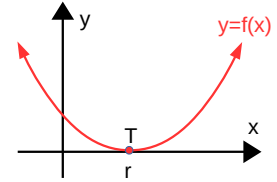
$$= -4 - 2 = -6$$

C) x eksenine teğet parabolün denklemi

Şekildeki parabolün denklemi

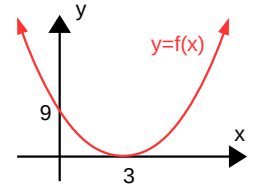
$y=f(x)=a(x-r)^2$ olarak ifade edilebilir.

Burada a'yı bulmak için daha önceki noktalardan farklı bir nokta kullanırız. (Bu şekildeki grafiği istersek tepe noktası x ekseninde olan grafik ya da çakışık ve kökleri r olan parabol olarak da yorumlayabiliriz)



Örnek...21 :

Şekilde A(3,0) noktasında x eksenine teğet parabol y eksenini B(0,9) noktasında kesiyorsa parabolün denklemini bulunuz.



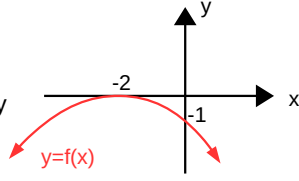
$$y = a(x-3)^2$$

$$9 = a \cdot 9 \rightarrow a = 1$$

$$y = (x-3)^2$$

Örnek...22 :

Şekilde K(-2,0) noktasında x eksenine teğet y=f(x) parabolü y eksenini B(0,-1) noktasında kesiyorsa f(1) değeri kaçtır?



$$y = a(x+2)^2$$

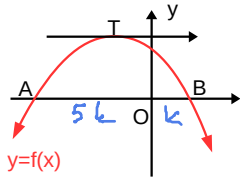
$$-1 = a \cdot 4 \rightarrow a = -1/4$$

$$f(x) = -\frac{1}{4}(x+2)^2$$

$$f(1) = -\frac{9}{4}$$

Örnek...23 :

Şekilde denklemi $y = -x^2 - 4x + k + 2$ olan parabolün grafiği veriliyor. $5|OB| = |AO|$ ise T noktasının koordinatları çarpımı kaçtır?



$$x_1 = k$$

$$x_2 = -5k$$

$$r = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{k - 5k}{2} = -2k = \frac{-4}{-2} \rightarrow k = 1$$

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = -5$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{k+2}{-1} = -5 \Rightarrow k = 3$$

$$f(x) = -x^2 - 4x + 5 \quad T(r, k')$$

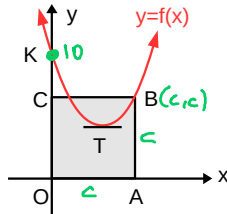
$$r = \frac{4}{-2} = -2$$

$$k' = f(-2) = -4 + 8 + 5 = 9$$

$$T(-2, 9) \Rightarrow (-2) \cdot 9 = -18$$

Örnek...24 :

Şekilde tepe noktası T(3,1) olan parabol y eksenini K(0,10) noktasında kesiyor. OABC karesinin B köşesi parabol üzerindedir. Bu karenin alanı kaç birim karedir?



$$y = a(x-3)^2 + 1$$

$$10 = 9a + 1 \Rightarrow a = 1$$

$$y = (x-3)^2 + 1$$

$$c = (c-3)^2 + 1 \rightarrow c^2 - 7c + 10 = 0$$

$$(c-5)(c-2) = 0$$

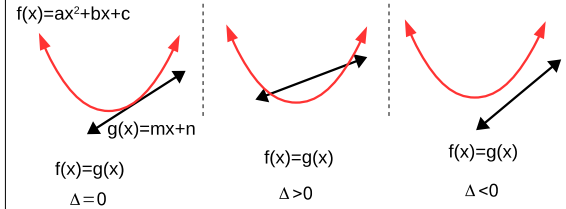
$$c = 5 \quad (c > 3 \text{ dekil})$$

$$c = 2$$

$$A(OABC) = 5 \cdot 5 = 25 \text{ br}^2$$

DÜZLEMDE PARABOL VE DOĞRUNUN DURUMLARI

Parabol ve doğru düzlemde üç durumda bulunabilir. Bu durumlar ortak çözüm yapılarak araştırılır.



Örnek...25 :

$y = x + 2$ doğrusu ile $y = x^2$ parabolünün kesim noktaları arası mesafe kaç birimdir?

$$x^2 = x + 2$$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$(x-2)(x+1) = 0$$

$$x_1 = 2$$

$$x_2 = -1$$

$$|AB| = \sqrt{1^2 + 3^2}$$

$$|AB| = \sqrt{10}$$

Örnek...26 :

$y = 6x + k$ doğrusu ile $y = 4x^2$ parabolü teğetse k kaçtır?

$$4x^2 = 6x + k$$

$$4x^2 - 6x - k = 0$$

$$\Delta = 36 - 4 \cdot 4 \cdot (-k) = 0$$

$$36 + 16k = 0$$

$$k = \frac{-36}{16} = -9/4$$

Örnek...27 :

$y = x + k$ doğrusu ile $x^2 = 4y$ parabolünü kesmiyorsa k nasıl seçilmelidir?

$$\frac{x^2}{4} = x + k$$

$$x^2 - 4x - 4k = 0$$

$$16 - 4 \cdot 1 \cdot (-4k) < 0$$

$$16k < -16$$

$$k < -1 \quad k \in (-\infty, -1)$$

Örnek...28 :

$y = x^2 + px + 4$ parabolüne orjinden çizilen teğetler dikse p nin alabileceği değerlerin çarpımı kaçtır?

$$x^2 + px + 4 = mx \quad (\Delta = 0)$$

$$x^2 + x(p-m) + 4 = 0$$

$$(p-m)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 0$$

$$(p-m) = \pm 4$$

$$m_1 = p + 4$$

$$m_2 = p - 4$$

$$m_1 \cdot m_2 = -1 = p^2 - 16$$

$$p^2 = 15$$

$$p = \pm \sqrt{15}$$

$$p_1 \cdot p_2 = -15$$

FONKSİYONLARDA UYGULAMALAR-2

PARABOL

DEĞERLENDİRME

- 1) $f(x) = 2x^2 - 6x - m$ parabolü x eksenine teğettir. Bu parabolün y eksenini kestiği noktanın ordinatı nedir?

$$\Delta = 0 \quad 36 - 4 \cdot 2(-m) = 0 \quad m = -9/2$$

$$f(0) = -m = \frac{9}{2}$$

- 2) $f(x) = x^2 - 5x - 12$ parabolü üzerindeki bir noktanın koordinatları toplamı en az kaçtır?

$$A(x, x^2 - 5x - 12)$$

$$T = x + x^2 - 5x - 12 = x^2 - 4x - 12$$

$$r = \frac{-b}{2a} = \frac{4}{2} = 2$$

$$k = 2^2 - 4 \cdot 2 - 12 = 4 - 8 - 12 = -16$$

- 3) $2x + y = 9$ doğrusu üzerindeki bir noktanın koordinatları çarpımı en çok kaçtır?

$$(x, y) = (x, 9 - 2x)$$

$$x \cdot (9 - 2x) = -2x^2 + 9x$$

$$r = \frac{-9}{-4} = \frac{9}{4}$$

$$k = f\left(\frac{9}{4}\right) = -2\left(\frac{9}{4}\right)^2 + 9\left(\frac{9}{4}\right) = \frac{81}{4}$$

- 4) Şekilde tepe noktası $F(1, -2)$ olan $y = x^2 + (b-3)x + c$ parabolü veriliyor. $b+c$ kaçtır?

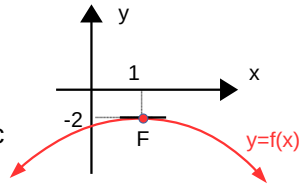
$$y = A(x-h)^2 - 2$$

$$y = (x-1)^2 - 2 = x^2 - 2x - 1$$

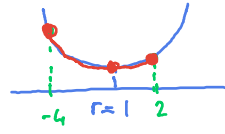
$$a = 1 \quad b-3 = -2 \quad c = -1$$

$$b = 1 \quad c = -1$$

$$b+c = 0$$



- 5) $f: [-4, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2x + 8$ fonksiyonunun görüntü kümesinde kaç farklı tamsayı vardır?

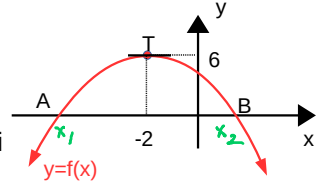


$$\min f(1) = 1 - 2 + 8 = 7$$

$$\max f(-4) = 16 + 8 + 8 = 32$$

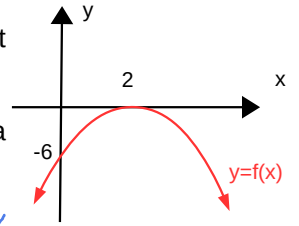
$$f: [-4, 2] \rightarrow [7, 32] \quad 7, 8, 9, \dots, 32 \rightarrow 26 \text{ değer}$$

- 6) Şekilde tepe noktası T noktası olan parabol verilmiştir. Buna göre A ve B noktalarının apsisi toplamı kaçtır?



$$\frac{x_1 + x_2}{2} = -2 \rightarrow x_1 + x_2 = -4$$

- 7) Şekilde Ox eksenine $A(2, 0)$ noktasında teğet olan ve denklemleri $f(x) = ax^2 + bx + c$ olan parabol verilmiştir. Buna göre $a+b+c$ kaçtır?



$$y = a(x-2)^2 - 6$$

$$-6 = 4a \rightarrow a = -3/4$$

$$a+b+c = f(1) = -\frac{3}{4}(1-2)^2 = -\frac{3}{4} \cdot 1 = -\frac{3}{4}$$

FONKSİYONLARDA UYGULAMALAR-2

PARABOL

- 8) $f(x)=(p+3)x^2-4x+p-3$ fonksiyonunun Ox eksenine pozitif tarafta teğet olması için p kaç olmalıdır?

$$\Delta = 0 \wedge r > 0$$

$$16 - 4 \cdot (p+3)(p-3) = 0$$

$$4 = p^2 - 9$$

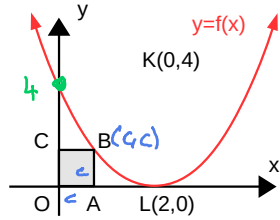
$$p = \pm \sqrt{13}$$

$$r = \frac{4}{p+3} > 0$$

$$p > -3$$

$$p = +\sqrt{13}$$

- 9) Şekilde L(2,0) noktasında x eksenine teğet parabol y eksenini K(0,4) noktasında kesiyor. OABC karesinin alanı kaç birim karedir?



$$y = a(x-2)^2$$

$$4 = a \cdot 4$$

$$a = 1$$

$$y = (x-2)^2$$

$$c = (c-2)^2 \rightarrow c^2 - 5c + 4 = 0$$

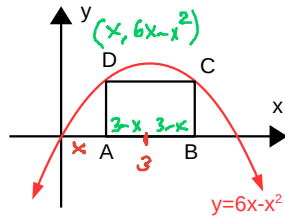
$$(c-4)(c-1) = 0$$

$$c = 4 \text{ (kaldı göre c=1)}$$

$$c = 1$$

$$A(OABC) = c^2 = 1$$

- 10) Şekildeki ABCD dikdörtgeninin D ve C köşeleri $y=6x-x^2$ parabolü üzerinde AB kenarı da x eksenindedir.



$$r = \frac{-6}{-2} = 3$$

$$D(x, 6x-x^2)$$

$$C(6-2x, 6x-x^2)$$

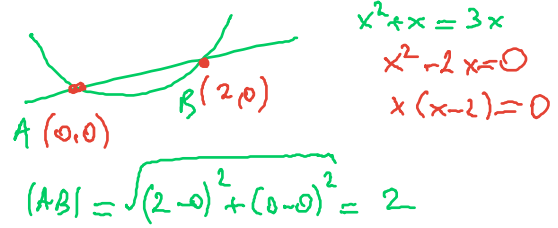
$$Q(ABCD) = (6-2x + 6x-x^2) \cdot 2x$$

$$= -2x^2 + 8x + 12$$

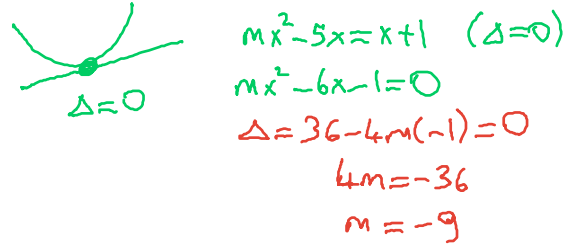
$$r = \frac{-8}{-4} = 2$$

$$K = -8 + 16 + 12 = 20$$

- 11) $y = x^2 + x$ parabolü ile $y = 3x$ doğrusunun kesim noktaları arası mesafe kaç birimdir?



- 12) $y = mx^2 - 5x$ parabolü ile $y = x+1$ doğrusunun teğet olması için m kaç olmalıdır?



- 13) Bilgi: Bir parabol ve bu parabol ile kesilmeyen bir doğru verildiğinde, parabol üzerinde doğruya en yakın nokta parabole teğet olan ve eğimi verilen doğru ile aynı olan doğrunun parabol ile ortak noktasıdır.

$f(x) = x^2 + 3$ fonksiyonu ve $y = 2x + 1$ doğrusu veriliyor. Buna göre,

- a) parabol üzerinde doğruya en yakın noktanın koordinatlarını bulunuz
b) doğru üzerinde parabole en yakın noktanın koordinatlarını bulunuz.

