

MODÜLER ARİTMETİK – 2

(MODÜLER ARİTMETİK – MODÜLER ARİTMETİK İŞLEMLERİ VE ÖZELLİKLERİ – DEĞERLENDİRME)

MOD KAVRAMI (DENKLİK)

a ve b tam sayıları arasındaki fark bir m pozitif tam sayısına tam bölünebiliyorsa bu sayılara m modülüne göre denktir denir ve $a \equiv b \pmod{m}$ yazılır.

Yani $m \in \mathbb{Z}^+, m|(a-b) \Leftrightarrow a \equiv b \pmod{m}$ dir

Örnek...1 :

$18 \equiv 3 \pmod{5}$, $18 \equiv 8 \pmod{5}$, $18 \equiv -2 \pmod{5}$

Örnek...2 :

$x \equiv 3 \pmod{5}$ denkleğini sağlayan x tam sayılarının çözüm kümesini bulalım.

Çözüm :

$x \equiv 3 \pmod{5}$ olduğundan
 $x = 3 + 5.k$ ($k \in \mathbb{Z}$) yazılabilir.

$k = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$ tam sayıları için

$x = \dots, -7, -2, 3, 8, 13, 18, \dots$ değerlerini alacağı için çözüm kümesi $\{\dots, -7, -2, 3, 8, 13, 18, \dots\}$ dir.

Burada elde ettiğimiz bu küme 5 ile bölündüğünde 3 kalanını veren tüm tam sayıların kümesidir. (Genel kültür olması açısından bu kümeyi $\bar{3}$ ile gösterdiğimizizi ve tam olarak şöyle yazdığımızı belirtelim; $\mathbb{Z}/5$ için $\bar{3} = \{\dots, -7, -2, 3, 8, 13, 18, \dots\}$ dir.)

{Bu gösterim matematikte kalan sınıfları kümesi olarak isimlendirilir ve şöyle tanımlanır.

" $m \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere, tam sayıların m' ye bölümünden kalanların kümesi \mathbb{Z}/m şeklinde gösterilir.

$$\mathbb{Z}/m = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \dots, \bar{(m-1)}\}$$

Bu bilgiden dolayı $\mathbb{Z}/4 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$ ve $\mathbb{Z}/7 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}\}$ dır.

$\mathbb{Z}/4 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$ kümesinin elemanları olan $\bar{0}$, $\bar{1}$, $\bar{2}$, $\bar{3}$ lerin de birer küme belirttiğine dikkat ediniz.}

Örnek...3 :

$8 \equiv x \pmod{5}$ denkleğini sağlayan en küçük pozitif doğal sayısı ile en büyük negatif tam sayısının çarpımı kaçtır?

-6

Örnek...4 :

$24 \equiv 4 \pmod{m}$ denkleğini sağlayan kaç tane m tam sayı değeri vardır? ($m > 1$)

5

Örnek...5 :

$x + 3 \equiv 7 \pmod{9}$ denkleğini sağlayan 50 den küçük kaç tane x doğal sayı değeri vardır?

6

Örnek...6 :

$2x + 3 \equiv 3x + 2 \pmod{5}$ denkleğini sağlayan iki basamaklı en büyük ve en küçük pozitif tam sayıların toplamı kaçtır?

107

Örnek...7 :

$x \equiv 2 \pmod{5}$ ve $x \equiv 2 \pmod{7}$ denklemlerini sağlayan üç basamaklı en küçük pozitif tam sayı kaçtır?

107

MODÜLER ARİTMETİK – 2

(MODÜLER ARİTMETİK – MODÜLER ARİTMETİK İŞLEMLERİ VE ÖZELLİKLERİ – DEĞERLENDİRME)

Örnek...8 :

$10 - m \equiv 4 \pmod{m}$
denkliğini sağlayan 20 den küçük kaç tam sayı vardır? ($m > 1$)

3

x	m	Eşitliğinde $x = m \cdot y + k$ ve $x - k = m \cdot y$ olduğundan x sayısının m modülüne göre dengi bulunurken sayı modüle bölünüp kalan yazılabilir.
-	y	
k		

Örnek...9 :

$23456 \equiv x \pmod{9}$ denkliğinde x kaç olabilir?
{..., -16, -7, 2, 11, 20, ...}

Örnek...10 :

$13826 \equiv x \pmod{11}$ denkliğinde x kaç olabilir?
{..., -23, -12, -1, 10, 21, ...}

Örnek...11 :

$16895685 \equiv x \pmod{8}$ denkliğinde x kaç olabilir?
{..., -11, -3, 5, 13, 21, ...}

Örnek...12 :

Cumartesi gününden 500 gün sonra hangi gün olur?

Salı

Örnek...13 :

9 günde bir nöbet tutan bir kişi ilk nöbetini Salı günü tutmuştur. 8. nöbetini hangi gün tutar?

Salı

Örnek...14 :

6 gün çalışıp 2 gün tatil yapan bir işçi, işe Salı günü başladığına göre, 11. tatil günü hangi gündür?

Cumartesi

Örnek...15 :

5 Ocak 2016 nın Salı günü olduğu bir yılda, 27 Temmuz hangi güne rastlar?

Çarşamba

MODÜLER ARİTMETİK – 2

(MODÜLER ARİTMETİK – MODÜLER ARİTMETİK İŞLEMLERİ VE ÖZELLİKLERİ – DEĞERLENDİRME)

MOD ÖZELLİKLERİ

k bir tamsayı ,

$$x \equiv y \pmod{m}$$

$$u \equiv v \pmod{m} \text{ iken}$$

$$1) x \pm k \equiv y \pm k \pmod{m}$$

$$2) k.x \equiv k.y \pmod{m}$$

$$3) x \pm u \equiv y \pm v \pmod{m}$$

$$4) x.u \equiv y.v \pmod{m}$$

$$5) x^n \equiv y^n \pmod{m} \quad n \in \mathbb{N}^+$$

6) $m \in \mathbb{Z}^+$, $a, b \in \mathbb{Z}$ için $\text{ebob}(m, a) = 1$ ve $ax \equiv b \pmod{m}$ denkleminde x'in bir değeri p ise bu denklemin çözüm kümesi $\{p+k.m : k \in \mathbb{Z}\}$ dir. Ayrıca $b \mid (m, a)$ ise çözüm var aksi halde yoktur.

7) m asal ve $(a, m) \equiv 1 \pmod{m}$ ise $a^{m-1} \equiv 1 \pmod{m}$ (burada daha küçük kuvvetlerde de 1 bulunabilir) (Fermat Teoremi)

8) m asal ise $(m-1)! \equiv -1 \pmod{m}$ (Wilson Teoremi)

Örnek...16 :

$2^{27} \equiv x \pmod{9}$ denkleminde x kaç olabilir?

8

Örnek...17 :

$1904^{1907} \equiv x \pmod{5}$ denkleminde x kaç olabilir?

4

Örnek...18 :

$14^x \equiv 5 \pmod{9}$ denklemini x iki basamaklı kaç farklı doğal sayı değeri vardır?

15

Örnek...19 :

$4x \equiv 3 \pmod{5}$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz ? {2}

MODÜLER ARİTMETİK – 2

(MODÜLER ARİTMETİK – MODÜLER ARİTMETİK İŞLEMLERİ VE ÖZELLİKLERİ – DEĞERLENDİRME)

Örnek...20 :

$(-41)^{100}$ sayısının birler basamağı kaçtır?

1

Örnek...21 :

$14^{67} + 42^{103} + 16^{314} \equiv x \pmod{5}$ ise x kaçtır?

3

Örnek...22 :

$3^{200} + 1453^{101}$ sayısının birler basamağı kaçtır?

4

Örnek...23 :

$1^{67} + 2^{67} + 3^{67} + \dots + 12^{67} \equiv x \pmod{13}$ olduğuna göre, x kaç olabilir?

0

DEĞERLENDİRME :

1) $49563125 \equiv x \pmod{7}$ ise x kaç olabilir?

3

2) $4x + 3 \equiv 6 \pmod{7}$ denkleğini sağlayan en küçük pozitif x tam sayısı kaçtır?

6

3) $0! + 1! + 2! + 3! + \dots + 23! \equiv x \pmod{5}$ denkleğinde, x' in değeri kaçtır?

4

4) x iki basamaklı bir doğal sayıdır.

$$x \equiv 3 \pmod{4}$$

$$x \equiv 3 \pmod{5}$$

olduğuna göre, x' in alabileceği en büyük ve en küçük değerler kaçtır?

83 ve 23

MODÜLER ARİTMETİK – 2

(MODÜLER ARİTMETİK – MODÜLER ARİTMETİK İŞLEMLERİ VE ÖZELLİKLERİ – DEĞERLENDİRME)

- 5) İNTEGRALİNTEGRALİNTEGRAL
şeklindeki bir yazılışta 976461. harf nedir?

G

- 6) Bugün günlerden salı ise 340 gün önce
günlerden nedir?

cuma

- 7) KPSS Sınavı 23 Eylül Pazar günü
yapılacaktır. Sonuçlar 25 gün sonra sonra
duyurulacaksa, bu hangi gün olur?

perşembe

- 8) 1 Aralık'ın Pazar günü olduğu bir yılda, yeni
yılın ilk günü hangi güne rastlar?

çarşamba

- 9) 5 Ocak 2016 nın Salı günü olduğu bir yılda, 1
Nisan hangi güne rastlar?

cuma

- 10) Daire satın alan bir kişi 140 aylık bir kredi
çekmiş ve ilk taksitini Mart ayında yatırmıştır.
Bu kişinin taksitleri hangi ayda bitecektir?

ekim

www.matbaz.com

MODÜLER ARİTMETİK – 2

(MODÜLER ARİTMETİK – MODÜLER ARİTMETİK İŞLEMLERİ VE ÖZELLİKLERİ – DEĞERLENDİRME)

- 11) 6 ve 15 günde bir aynı limandan sefere çıkan iki gemi Pazar günü beraber sefere çıkmışlardır. Bundan sonra ikinci defa beraber sefere hangi gün çıkarlar?

perşembe

- 14) Herhangi bir yılın Temmuz ayında 5 tane Pazartesi günü vardır. Bunlardan üçünün tarihi tek sayı olduğuna göre, 9 Temmuz hangi gün olabilir?

Pazar,salı

- 12) Perşembe günü saat 13:00' ı gösteren bir saat, 2010 saat sonra hangi gün ve saati gösterir?

Perşembe; 07:00

- 15) 6 gün çalışıp 2 gün tatil yapan bir işçi, işe Salı günü başladığına göre, 21. tatil günü hangi gündür?

perşembe

- 13) Beş günde bir nöbet tutan asker, ilk nöbetini salı günü tuttuğuna göre, 25. nöbetini hangi gün tutar?

çarşamba

- 16) $36! + 51! \equiv x \pmod{37}$ denkleğinde, x değeri kaç olabilir?

36