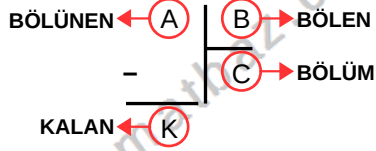


MODÜLER ARİTMETİK – 1

(BÖLME – BÖLÜNEBİLME KURALLARI – ÖKLİT ALGORİTMASI – DEĞERLENDİRME)

BÖLME İŞLEMİ VE ÖZELLİKLERİ

A, B, C, K doğal sayılar ve $B \neq 0$ olmak üzere,



Bu bölme işleminde;

- 1) $A = B \cdot C + K$ 2) $0 \leq K < |B|$
- 3) $K=0$ ise A sayısı B'ye tam bölünür denir ve $B | A$ şeklinde yazılır, "B böler A" diye okunur.
- 4) $K < C$ ise B ile C yer değiştirilebilir.

Örnek...1 :

Yandaki bölme işleminde bölüm ile kalanın toplamı kaçtır?

$$\begin{array}{r} b \ a \ b \ a \ 5 \ | \ b \ a \\ \hline \end{array}$$

1015

Örnek...2 :

A, x, y birer doğal sayı olmak üzere, yandaki bölme işleminde y nin alabileceği değerlerin toplamını bulunuz.

$$\begin{array}{r} A \ | \ 13 \\ \hline y \end{array}$$

78

Örnek...3 :

Yandaki bölme işlemlerinde a, b, c sıfırdan farklı

$$\begin{array}{r} a \ | \ b \\ \hline 3 \end{array} \quad \begin{array}{r} b \ | \ c \\ \hline 4 \end{array} \quad \begin{array}{r} b \ | \ c \\ \hline 1 \end{array}$$

pozitif tam sayılar olmak üzere, a' nın c türünden eşiti nedir?

12.c+7

Örnek...4 :

x sayısının y ile bölümündeki bölüm 2 ve kalan 5 tir. y sayısının z ile bölümündeki bölüm 3 ve kalan 7 dir. x sayısının 6 ile bölümündeki kalan kaçtır?

1

Örnek...5 :

A, B, C birbirinden farklı doğal sayıları için, yandaki bölme işleminde B ile C nin yer değiştirmesi, sonucu değiştirmedigine göre, A en az kaç olabilir?

$$\begin{array}{r} A \ | \ B \\ \hline - \end{array} \quad \begin{array}{r} C \\ \hline 12 \end{array}$$

194

Örnek...6 :

Yandaki bölme işleminde A ve n birer doğal sayıdır. A nın alabileceği en küçük ve en büyük değerleri bulunuz.

$$\begin{array}{r} A \ | \ 9 \\ \hline - \end{array} \quad \begin{array}{r} 2.n+3 \\ \hline n-1 \end{array}$$

45 ve 197

ASAL SAYI

Sadece 1 ve kendisine bölünen sayılara asal sayı denir. En küçük asal sayı tek çift asal sayı olan 2 dir.

Örnek...7 :

a ve b doğal sayılar olmak üzere $a^2 - b^2 = 13$ ise $a^2 + b^2$ kaçtır?

85

ARALARINDA ASAL SAYI

Ortak pozitif tam sayı böleni sadece 1 olan sayılara aralarında asal sayılar denir. Örneğin 26 ve 15 aralarında asaldır.

Örnek...8 :

5, 12 ve 13 sayıları aralarında asal mıdır?

Evet

MODÜLER ARİTMETİK – 1

(BÖLME – BÖLÜNEBİLME KURALLARI – ÖKLİT ALGORİTMASI – DEĞERLENDİRME)

ASAL ÇARPANLARA AYIRMA

1 den büyük bir doğal sayının asal çarpanlarının çarpımı şeklinde yazılmasına sayının asal çarpanlara ayrılması denir.
x, y farklı asallar olmak üzere,
 $A = x^m \cdot y^n$
yazımı A'nın asal çarpanlarına ayrılmış biçimidir.

Örnek...9 :

360 sayısını asal çarpanlarına ayırınız?

$$2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$$

Örnek...10 :

A, x ve y tam sayılar olmak üzere,
 $80! = 2^x \cdot 5^y \cdot A$
ise x ve y en çok kaçtır?

$$78 \text{ ve } 19$$

Örnek...11 :

9! sayısını asal çarpanlarına ayırınız?

$$2^7 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7$$

Örnek...12 :

45! sayısının sondan kaç basamağı 0 dır?

$$10$$

Örnek...13 :

$360 \cdot x = y^2$ eşitliğini sağlayan en küçük x ve y pozitif tam sayılarını bulunuz?

$$x=10 \text{ ve } y=60$$

Örnek...14 :

360 sayısının

- a) kaç asal böleni vardır?
- b) kaç pozitif tam sayı böleni vardır?
- c) kaç tam sayı böleni vardır?
- d) asal olmayan kaç pozitif böleni vardır?

$$a)3 \text{ b)24 c)48 d)21}$$

BİLGİ

Asal çarpanlara ayrılmış biçimi

$$A = x^m \cdot y^n \cdot z^k$$

olan A sayısının $(m+1) \cdot (n+1) \cdot (k+1)$ çarpımının sonucu kadar pozitif tam sayı böleni vardır.

BÖLÜNEBİLME KURALLARI

2' YE 5' E VE 10' A BÖLÜNEBİLME KURALLARI :

Bir doğal sayının birler basamağındaki rakam çiftse, bu sayı 2 ile kalansız (tam) bölünebilir. Eğer tam bölünmüyor ise sayının 2 ye bölümünden kalanı verir.

Bir doğal sayının birler basamağı 0 veya 5 ise, bu sayı 5 ile kalansız (tam) bölünebilir. Eğer tam bölünmüyor ise sayının 5 e bölümünden kalanı verir.

Bir doğal sayının birler basamağındaki rakam 0 ise, bu sayı 10 ile kalansız (tam) bölünebilir. Eğer tam bölünmüyor ise sayının 10 a bölümünden kalanı verir.

Örnek...15 :

Dört basamaklı a74a sayısı 2 ile kalansız bölünebildiğine göre, a kaç farklı değer alabilir?

$$4$$

Örnek...16 :

732a rakamları farklı, dört basamaklı, 2 ile bölündüğünde 1 kalanı veren doğal sayıdır. a nın alabileceği değerler çarpımı kaçtır?

$$45$$

MODÜLER ARİTMETİK – 1

(BÖLME – BÖLÜNEBİLME KURALLARI – ÖKLİT ALGORİTMASI – DEĞERLENDİRME)

Örnek...17 :

abcd a sayısı 30000 den büyük ve ikiye bölündüğünde 1 kalanını veren beş basamaklı bir sayıdır. a' nın alabileceği değerlerin toplamı kaçtır?

24

Örnek...18 :

Dört basamaklı 357m sayısının 5 ile bölümünden kalan 2 olduğuna göre, m nin alabileceği değerlerin kümesini bulunuz.

{2,7}

3' E VE 9' A BÖLÜNEBİLME KURALLARI :

Bir doğal sayının rakamlarının sayı değerlerinin toplamı 3 ün (9 un) katı ise, bu sayı 3 ile (9 ile) kalansız (tam) bölünebilir. Eğer tam bölünmüyor ise sayının 3 e veya 9 a bölümünden kalanı verir.

Örnek...19 :

52A3 dört basamaklı sayısının 3 ile kalansız bölünebilmesi için, A yerine yazılabilecek rakamların kümesini bulalım.

{2,5,8}

Örnek...20 :

A = 2ab54317 sayısının rakamları farklı ve 9 ile bölünebilen bir sayı olduğu bilindiğine göre a.b çarpımı kaç olabilir?

48

Örnek...21 :

33 basamaklı 858585....858 sayısının 9 ile bölümünden kalan kaçtır?

0

Örnek...22 :

Dört basamaklı a37b sayısının 10 ile bölümünden kalan 7 dir. Bu sayı 9 ile kalansız bölünebildiğine göre, a kaçtır?

1

11 İLE BÖLÜNEBİLME KURALI :

Bir doğal sayının basamakları 1' ler basamağından başlanarak sola doğru " +, -, +, -, +, ..." biçiminde işaretlenir. Bu işaretlerle rakam değerleri çarpılarak toplanır. Elde edilen sonuç 0 veya 11 in katı ise bu sayı 11 ile kalansız bölünebilir. Eğer tam bölünmüyor ise sayının 11 e bölümünden kalanı verir.

Örnek...23 :

Altı basamaklı 245 795 sayısının 11 ile bölümünden kalan kaçtır?

0

Örnek...24 :

Altı basamaklı 3275a7 sayısı 11 ile kalansız bölündüğüne göre, a kaçtır ?

4

Örnek...25 :

Rakamları farklı, üç basamaklı pozitif tam sayıların en büyüğü ve en küçüğünün çarpımlarının 11 ile bölümünden kalan kaçtır?

2

Örnek...26 :

87xy sayısı 2 ve 11 ile tam bölünebildiğine göre, x' in alacağı değerler toplamı kaçtır?

16

MODÜLER ARİTMETİK – 1

(BÖLME – BÖLÜNEBİLME KURALLARI – ÖKLİT ALGORİTMASI – DEĞERLENDİRME)

4 İLE VE 8 İLE BÖLÜNEBİLME KURALLARI :

Bir doğal sayının birler ve onlar basamağındaki rakamlarının oluşturduğu sayı 00 ya da 4 ün katı ise, 4 ile kalansız bölünebilir. Eğer tam bölünmüyor ise sayının 4 e bölümünden kalanı verir.

Bir doğal sayının birler , onlar yüzler basamağındaki rakamlarının oluşturduğu sayı 000 ya da 8 in katı ise, 8 ile kalansız bölünebilir. Eğer tam bölünmüyor ise sayının 8 e bölümünden kalanı verir.

Örnek...27 :

54675 beş basamaklı doğal sayının 4 ve 8 ile bölümünden kalanlar çarpımı kaçtır?

9

Örnek...28 :

Dört basamaklı 735m sayısı, 4 ile bölündüğünde kalan 3 olduğuna göre, m rakamı kaç farklı değer alır?

3

7 İLE BÖLÜNEBİLME KURALI :

$$\begin{array}{r} + \quad - \quad + \\ ab \quad cde \quad fgh \\ 31 \quad 231 \quad 231 \end{array}$$

şeklindeki bir sayı birler basamağından başlanarak üçlü gruplara (yani bölüklere) ayrılarak sırasıyla " ... , -, +, -, + " şeklinde işaretlenir. İşaretli grupların rakamları soldan sağa 2,3 ve 1 sayıları ile sırasıyla çarpılır ve sonuç bulunur. Bu sonuç 7 nin katı ise sayı 7 ye tam bölünür. Eğer tam bölünmüyor ise sayının 7 ye bölümünden kalanı verir.

Örnek...29 :

322 667 sayısının 7 ile bölümünden kalan kaçtır?

2

Örnek...30 :

1234567 sayısının 7 ile bölümünden kalan kaçtır?

6, 12, 15, 18, 20, 24, 30, 36, 45 İLE BÖLÜNEBİLME KURALLARI :

5

BÖLÜNEBİLME KURALI :

m ile n **aralarında asal** iki sayı olsun, m ve n ile kalansız bölünebilen sayılar m.n çarpımı ile de kalansız bölünür. Dolayısı ile m.n' ye tam bölünebilen bir sayıda hem m' ye hem de n' ye tam bölünebilir.

Bir sayı 6 ile bölünebiliyorsa hem 2 hem de 3' e tam bölünebilir.

Bir sayı 24 ile bölünebiliyorsa hem 3 hem de 8' e tam bölünebilir. (Ama hem 6 hem 4 ile bölünemez.)

Örnek...31 :

Bir sayının aşağıdaki sayılara bölünebilmesi için hangi sayılara tam olarak bölünmesi gerekir?

12 =	15 =	18 =
20 =	30 =	36 =
45 =	55 =	63 =

Örnek...32 :

Dört basamaklı 634a sayısının 6 ile kalansız bölünebilmesi için, a yerine yazılabilecek rakamların toplamı kaçtır?

10

Örnek...33 :

Dört basamaklı 4a7b sayısı 45 ile kalansız bölündüğüne göre, a nın alabileceği değerlerin toplamı kaçtır?

9

Örnek...34 :

Beş basamaklı 847AB sayısı 15 ile bölümünden kalan 6 ise A+B kaç olabilir?

2, 5, 8, 11, 14

MODÜLER ARİTMETİK – 1

(BÖLME – BÖLÜNEBİLME KURALLARI – ÖKLİT ALGORİTMASI – DEĞERLENDİRME)

Örnek...35 :

Altı basamaklı 317a2b sayısı 12 ile bölümünden 7 kalıyor ise a+b toplamı en çok kaç olabilir?

15

16 İLE BÖLÜNEBİLME KURALI :

Bir doğal sayının son dört basamağının oluşturduğu sayı 0000 ya da 16'nın katı ise, bu sayı 16 ile kalansız bölünür. Eğer tam bölünmüyorsa ise sayının 16 ya bölümünden kalanı verir.

25 İLE BÖLÜNEBİLME KURALI :

Bir doğal sayının birler ve onlar basamağının oluşturduğu iki basamaklı sayı 00 ya da 25'in katı ise, o doğal sayı 25 ile kalansız bölünür. Eğer tam bölünmüyorsa ise sayının 25'e bölümünden kalanı verir.

EBOB

İkisi birden sıfır olmayan a ve b tam sayılarının ikisini birden bölen en büyük pozitif tam sayıya bu sayıların **en büyük ortak bölene** (EBOB) denir ve $EBOB(a,b)=x$ biçiminde gösterilir.

Örnek...36 :

$EBOB(24,36)=?$

$EBOB(18,60)=?$

12 ve 6

EBOB ÖZELLİKLERİ

- 1) $EBOB(a,b)=EBOB(b,a)=EBOB(-a,b)$
- 2) $EBOB(a,b+c.a)=EBOB(a,b)$
- 3) $EBOB(a,b) \leq \min\{|a|,|b|\}$
- 4) $EBOB(a,b)=1$ ise a ile b aralarında asal sayıdır.

İki sayının en büyük ortak bölenini yukarıdaki yöntemlerden farklı olarak Öklid algoritması ile de bulabiliriz. Şimdi bunu öğrenelim.

ÖKLİD ALGORİTMASI

A ve B sayılarının obeb'ini bulmak için Öklid algoritmasını kullanabiliriz. Bu algoritma da

Adım 1) Büyük sayı küçük sayıya bölünür.

$$\begin{array}{r} A \quad | \quad B \\ - \quad \quad | \quad C \\ \hline K \end{array}$$

Adım 2) Kalan 0 ise obeb o bölmenin bölenidir.

Adım 3) Kalan 0 değilse, ilk bölmenin böleni kalanına tekrar bölünür ve kalan 0 olana kadar böyle yapılır. Sıfır kalanına ulaşıncaya adım 2) gereği obob bulunmuş olur.

Örnek...37 :

Obeb(60,15) kaçtır?

Öklid algoritmasına göre,

$$\begin{array}{r} 60 \quad | \quad 15 \\ - \quad \quad | \quad 4 \\ \hline 0 \end{array}$$

$OBE(60,15)=15$ tir.

Örnek...38 :

Obeb(60,36) kaçtır?

Çözüm :

Öklid algoritmasına göre;

$$\begin{array}{r} \text{Adım 1)} \\ 60 \quad | \quad 36 \\ - 36 \quad | \quad 1 \\ \hline 24 \end{array} \quad \begin{array}{r} \text{Adım 2)} \\ 36 \quad | \quad 24 \\ - 24 \quad | \quad 1 \\ \hline 12 \end{array} \quad \begin{array}{r} \text{Adım 3)} \\ 24 \quad | \quad 12 \\ - 24 \quad | \quad 2 \\ \hline 0 \end{array}$$

$OBE(60,36)=12$ dir.

Örnek...39 :

Obeb(120,140) kaçtır? Öklid algoritmasıyla hesaplayınız?

20

MODÜLER ARİTMETİK – 1

(BÖLME – BÖLÜNEBİLME KURALLARI – ÖKLİT ALGORİTMASI – DEĞERLENDİRME)

Örnek...40 :

Obeb(336,90) kaçtır? Öklit algoritmasıyla hesaplayınız?

6

a ve b sıfırdan farklı tam sayılar ve c tam sayı ise

$$a.x + b.y = c$$

denkleminde obeb(a,b), c sayısının bölünüyorsa (x,y) tam sayı ikilisi çözümleri bulunabilir.

Örnek...41 :

$2x + 4y = 1263$ denkleminin tam sayılar kümesinde çözüm kümesi kaç elemanlıdır?

0

$$ax + by = c = \text{obeb}(a, b)$$

denkleminde (x,y) tam sayı ikilisi çözümleri öklit algoritmasıyla bulunabilir.

Örnek...42 :

$5x + 12y = 1$ denkleminin (x,y) biçiminde ki çözümlerinden bir tanesini, tam sayılar kümesinde öklit algoritmasıyla bulunuz.

(5, -2)

Örnek...43 :

$$\text{Ebob}(48, 30) = x.48 + y.30$$

denkleminin tam sayılar kümesinde çözümlerinden bir tanesini öklit algoritmasıyla bulunuz.

(2, -3)

EKOK

Sıfırdan farklı a ve b tam sayılarının katlarından en küçük olup ortak olanına bu sayıların **En Küçük Ortak Katı (EKOK)** denir.

Örnek...44 :

EKOK(24,36)=?

EKOK(18,60)=?

72 ; 180

EKOK ÖZELLİKLERİ

- 1) $\text{EKOK}(a, b) = \text{EKOK}(b, a)$
- 2) $\text{EKOK}(a, b) \geq \max\{|a|, |b|\}$
- 3) $\text{EBOB}(a, b) \cdot \text{EKOK}(a, b) = a \cdot b$

Örnek...45 :

$\text{EKOK}(A, B) = 120$ ve $\text{EBOB}(A, B) = 6$ ise $A + B$ kaç olabilir?

126 veya 54

MODÜLER ARİTMETİK – 1

(BÖLME – BÖLÜNEBİLME KURALLARI – ÖKLİT ALGORİTMASI – DEĞERLENDİRME)

DEĞERLENDİRME :

- 1) Yanda verilen bölmelerde x, y, z pozitif tam sayı olduğuna göre, $\frac{x+y+z-20}{5z}$ oranının değeri kaçtır?

$$\begin{array}{r} x \quad y \quad z \\ - \quad \quad \quad - \quad \quad \quad - \quad \quad \quad \\ \hline 2 \quad 5 \quad 3 \quad 4 \end{array}$$

5

- 2) Yandaki bölme işleminde A sayısı en çok kaçtır?

$$\begin{array}{r} A \quad 15 \\ - \quad \quad \quad \\ \hline n^2+n \quad 2.n+2 \end{array}$$

132

- 3) X sayısının 6 ile bölümünden kalan 5 ve bölüm Y dir. Y nin 5 ile bölümünden kalan 2 ise X in 15 ile bölümünden kalan kaçtır?

2

- 4) İkiye tam bölünebilen iki basamaklı doğal sayıların kaç tanesi beşe kalansız bölünebilir?

9

- 5) Beş basamaklı 57m32 sayısının 9 ile bölümünden kalanın 7 olması için, m kaç olmalıdır?

8

- 6) 98765 sayısının karesinin 11' e bölümünden kalan kaçtır?

7

- 7) $23 \times 7y$ beş basamaklı sayısı 5 ve 11 ile tam bölünebildiğine göre, x in değerleri çarpımı kaçtır?

24

- 8) Dört basamaklı $45a2$ sayısının 4 ile kalansız bölünebilmesi için, a yerine yazılabilecek rakamların kümesini bulunuz?

{1,3,5,7,9}

- 9) Dört basamaklı $58x2$ sayısı 8 ile kalansız bölünebildiğine göre, x in alacağı değerler çarpımı kaçtır?

21

- 10) $356x8y$ altı basamaklı sayısı 36 ile tam bölünebildiğine göre, x lerin toplamı kaçtır?

12

MODÜLER ARİTMETİK – 1

(BÖLME – BÖLÜNEBİLME KURALLARI – ÖKLİT ALGORİTMASI – DEĞERLENDİRME)

- 11) Dört basamaklı $47a5$ sayısı 25 ile kalansız bölünebildiğine göre, a kaç farklı değer alır?

2

- 12) $24x78y$ altı basamaklı çift sayının 45 ile bölümünden kalan 17 olduğuna göre, x kaçtır?

3

- 13) $478x5y$ altı basamaklı sayının 30 ile bölümünden kalan 17 olduğuna göre, x lerin çarpımı kaçtır?

28

- 14) $48!+49!-1$ sayısının sondan kaç basamağı 9 dur?

12

- 15) x ve y iki basamaklı tam sayılardır.

$$65.x+90.y=\text{EBOB}(65, 90)$$

olduğuna göre $x+y$ toplamının alabileceği en büyük değer kaçtır?

27

BİLGİ

a , b ve c tam sayılar olmak üzere,
 $a.x+b.y=c$
eşitliğini sağlayan (x,y) ikililerinden biri (β, θ) ise $(\beta+b, \theta-a)$ ikilisi de bu eşitliği sağlar.
Yani x bileşeni y nin katsayı kadar **artarken** (**azalırken**), y bileşeni x in katsayısı kadar **azalır** (**artar**).