

MATEMATİKSEL ARAÇLAR

AÇIK ÖNERMELER

İçerisinde değişken olan ve değişkenin değerlerine göre doğru ya da yanlış olabilen önermelere açık önerme denir.

Açık önermeler değişkenine göre $P(x), Q(a)$ biçimleriyle gösterilebilirler.

Denklemler ve eşitsizlikler açık önermelerdir

Örnek...1 :

$P(x)$: “ x bir tamsayı ve $x^2 \leq 10$ ” önermesi $x=-1, 3$ için doğru $x=5$ için yanlıştır.

Doğruluk Kümesi : Açık önermeyi doğru yapan değerlerin kümesine doğruluk kümesi denir.

Örnek...2 :

$P(x)$: “ x bir tamsayı ve $x^2 \leq 10$ ” önermesinin doğruluk kümesi D ise bu kümeyi bulunuz.

Örnek...3 :

$P(x)$: x bir tamsayı, $(x-2)(x-1)(2x+3)=0$ önermesinin doğruluk kümesini bulunuz.

Örnek...4 :

$P(x,y)$: x,y birer doğal sayı, $3x+2y=30$ önermesinin doğruluk kümesini bulunuz.

Örnek...5 :

$P(x,y)$: x,y birer doğal sayı, $x+5y=20$ önermesi için $P(10,k) \equiv 1$ ise k kaçtır?

Denklemler ve eşitsizlikler açık önermelerdir

NİCELEYİCİLER

Kesin olarak doğru veya yanlış hüküm içeren ifadeler önerme denir. Matematikte “bazı”, “her”, “bir tek” gibi niceleyicilerle de yapılan önermeler vardır.

Örnek...6 :

p : “Bazı doğal sayılar asaldır.”
 q : “Her reel sayının karesi 0'dan büyüktür”

“Bazı” niceleyicisi ile yapılan önermelerin doğruluğunu gösterebilmek için en az bir doğru örnek gösterilebilmesi ; “her” niceleyicisi ile yapılan önermelerin doğru olmadığını gösterebilmek için bir tane yanlış örnek göstermek yeterlidir.

Örnek...7 :

p : Bazı Doğal sayılar tektir.
 q : her reel sayı çifttir.
 r : her sayı 15'e kalansız olarak bölünebilir.
 önermelerinin doğruluk değerlerini bulunuz

Matematikte varlıksal niceleyici denilen bazı sözcüğü sembolü ile $\exists$; evrensel niceleyici denilen her sözcüğü ise $\forall$ sembolü ile ; bir tek niceleyicisi ise $\exists!$ veya $\exists^*$ sembolü ile belirtilirler.

Bazı niceleyicisinin olumsuzu her niceleyicisi ; her niceleyicisinin olumsuzu ise bazı niceleyicisidir.

Örnek...8 :

p : “Bazı sayılar asaldır” , önermesinin olumsuzu
 p' : “Her sayı asal değildir” , önermesidir.

Verilen bir önermeyi $q(x)$ ve bu önermenin olumsuzunu $q'(x)$ ile gösteriyorsak
 $q(x)$: “ $\exists x : p(x)$ ” önermesinin olumsuzu
 $q'(x)$: “ $\forall x : p(x)$ değil” önermesidir.

MANTIK – 2

NİCELEYİCİLER - İSPAT YÖNTEMLERİ

Örnek...9 :

Önermelerin deęillerini bulunuz
p:" Bazı doğal sayılar asaldır."
q:" Her tamsayı 5'e kalansız bölünür"
r: $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 + x \leq 0$
t: $(\exists x \in \mathbb{R} : 4^x \leq 0) \wedge (\forall x \in \mathbb{R} : 2x > 1)$

Örnek...10 :

Önermenin deęilini bulunuz

t: $(\forall x \in \mathbb{R} : 2x \leq 0) \Rightarrow (\exists x \in \mathbb{R} : x > 1)$

s: Bazı günler tatilse her doğal sayı asaldır.

Bir terimin kapsamını, niteliklerini belirleme amaçlı açıklamaya tanım denir. Bir terimin belirlenmesi amacıyla tanımlı veya tanımsız terimler kullanılmasına terimi tanımlama deriz.

Aksiyom Doğru olduğu ispatlanmadan kabul edilen önermelere aksiyom denir. Örneğin "iki noktadan bir doğru geçer" önermesi bir geometri aksiyomdur.

Teorem Doğruluğu gösterilen önermelere teorem denir.

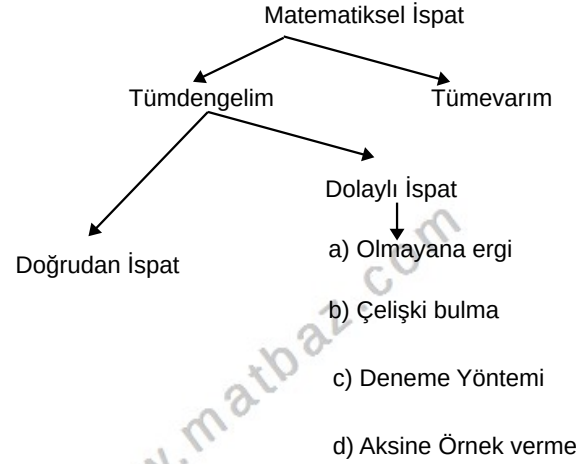
Teoremler p doğru iken $p \Rightarrow q$ içimindeki doğru önermelerdir.

Buradaki $p \Rightarrow q$ önermesine de p ye teoremin hipotezi(varsayım) q ya ise teoremin hükmü (yargı) denir.

Örnek...11 :

p:"a ve b iki tek sayı ise a.b de tektir".
önermesi bir teoremdir. Bu teoremden
hipotez:
hüküm:

Teoremin ispatlanması : Teoremin doğruluğunun gösterilmesi işlemine teoremin ispatlanması denir.



Doğrudan ispat : Hipotez doğru kabul edilir, hükmün de doğru olduğu gösterilir.

Örnek...12 :

$2x-3=7$ ise $x=5$ tir teoremini doğrudan ispat metodu ile ispatlayınız.

Örnek...13 :

p: "a ve b iki tek sayı ise $a+b$ çifttir"
önermesini doğrudan ispat yöntemiyle ispatlayınız.

MANTIK – 2

NİCELEYİCİLER - İSPAT YÖNTEMLERİ

Olmayana Ergi (Karşıt ters) Yöntemi :
 $p \Rightarrow q$ yerine buna denk olan $q' \Rightarrow p'$ önermesinin doğru olduğu gösterilir.

Örnek...14 :

$x^2 \neq 16$ ise $x \neq 4$ önermesini olmayana ergi metodu ile ispatlayınız.

Deneme Yöntemi : Değişkenin farklı değerleri önermenin doğruluğunun bakılmasıdır. Eğer verilen önermenin doğru olmadığını gösteren en az bir örnek varsa bu önermenin yanlış olduğu ispatlanmış olur. (Burada niceleyicilere dikkat edilmesi koşulu vardır)

Örnek...17 :

En az bir x doğal sayı değeri için $x^3 - 10x > 0$ olduğunu gösteriniz (deneme yöntemiyle)

Çelişki Yöntemi : $p \Rightarrow q$ önermesinin doğruluğunu göstermek için $p \Rightarrow q$ önermesinin değilinin yanlışlığını göstermeye dayanan ispat türüdür. Hipotez kabul edilip yapılan işlemlerle hüküm kısmının değilinin yanlış olduğu gösterilerek (hükümün değilinin yanlışlığı dolayısıyla hükmün doğru olduğu gösterilerek) çelişki elde edilir.

Örnek...15 :

P: " $x=5$ ise $x^2=25$ " teoremini çelişki bulma yoluyla ispat ediniz.

Örnek...16 :

p: " a tek sayı ise a^2 de tektir" önermesini çelişki bulma yöntemiyle ispatlayınız.

Örnek...18 :

p: "her reel sayının karesi 1 den büyüktür" önermesi doğru bir önermedir? (Aksine örnek vererek ispatlayınız)

TÜMEVARIM

Matematikte ispatlar tümevarım ve tümdengelim olmak üzere iki farklı akıl yürütme yöntemiyle yapılır. Tümdengelim ile tümevarım ilkeleri birbirinin zıttı olan yöntemlerdir. Tümdengelim ilkesinde genelden özele gidilir. Tümevarım yönteminde özelden genele gidilir.

Çevremizde gerçekleşen olayları açıklayabilmek için yaptığımız ölçme, gözlem ve deneyler sonucunda kesin olmasada çevremizdeki olayları tahmin etmeye çalışırız. Matematiksel tümevarım ilkesiyle ulaşılan sonuç kesindir.

Matematiksel Tümevarım ilkesi :

Bu bölümde incelenecek önermeler herhangi bir n doğal sayısından büyük veya eşit tüm doğal sayılar için geçerli önermeleri içermektedir. Sonsuz sayıda doğal sayı için belirtilen önermelerin doğruluğuna, sadece sınırlı sayıda doğal sayı deneyerek karar verilemez (doğruluğu ispat edilemez) Önermeler genelde $\forall n \geq n_0, P(n): Q(n)$ biçiminde olup $Q(n)$ kısmında sayıların sağladığı özellik belirtilir.

Örnek...19 :

$\forall n \geq 0, p(n): (4n+1)^2 \geq n!$ açık önermesini ele alalım.

$$P(0): (1)^2 = 1 \geq 0! = 1 \text{ doğru}$$

$$P(1): (5)^2 = 25 \geq 1! = 1 \text{ doğru}$$

$$P(2): (9)^2 = 81 \geq 2! = 2 \text{ doğru}$$

benzer şekilde $n=6$ ya kadar ifadeler doğru ama sonrasında ise yanlıştır. Dolayısıyla sadece belli sayıda doğal sayı için doğruluk kontrol edilerek $p(n)$ önermesinin doğruluğu söylenemez.

Tümevarım ilkesiyle bir önermenin doğruluğunu göstermek için :

Adım 1 $p(n)$ önermesi verilen koşulu sağladığı iddia edilen en küçük doğal sayı $n = a$ için doğru olmalı

Adım 2 $k > a$ olmak üzere, $p(n)$ önermesi $n = k$ için ($p(k)$ önermesi) doğru varsayıldığında $n = k + 1$ için de doğru olduğu gösterilebilir.

Buradaki adımlar bir dominonun devrilen taşları gibi görülebilir. Şöyleki bütün domino taşlarının devrilmesi, ilk domino taşının devrilmesi ve bir sonraki domino taşını ardı ardına devirmesiyle mümkün olabilir.



Örnek...20 :

$$\forall n > 0, p(n): 1+2+3+\dots+n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}, (n \in \mathbb{N})$$

önermesinin doğruluğunu tümevarım yöntemiyle araştırınız

Adım 1 $p(1): 1 = \frac{1 \cdot (1+1)}{2}$ doğru

Adım 2 $\forall n > 0, p(k): 1+2+3+\dots+k = \frac{k \cdot (k+1)}{2}$ doğru olsun.

Bizim göstermemiz gereken

$$\forall n > 0, p(k+1): 1+2+3+\dots+k+1 = \frac{(k+1) \cdot (k+2)}{2}$$

olduğudur.

$$1+2+3+\dots+k+1 = \frac{(k+1) \cdot (k+2)}{2} \text{ ifadesini elde etmek}$$

için doğru olduğunu varsaydığımız

$$1+2+3+\dots+k = \frac{k \cdot (k+1)}{2} \text{ eşitliğinin her iki yanına}$$

$k+1$ ekleyelim

$$1+2+3+\dots+k+(k+1) = \frac{k \cdot (k+1)}{2} + (k+1)$$

$$P(k+1) = \frac{k \cdot (k+1)}{2} + (k+1) = (k+1) \left(\frac{k}{2} + 1 \right) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

bu ise aranan eşitliktir.

Dolayısıyla verilen $P(n)$ her $n > 0$ için doğrudur.

n bir doğal sayı olmak üzere önermelerin doğruluğunu araştırınız

Örnek...1 :

$$\forall n > 0, p(n): 2+4+6+\dots+2n = n \cdot (n+1)$$

MANTIK – 2

NİCELEYİCİLER - İSPAT YÖNTEMLERİ

Örnek...2 :

$\forall n > 0, p(n): 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$
olduğunu tümevarım yöntemiyle gösteriniz

Örnek...3 :

$\forall n > 0, p(n): 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n \cdot (n+1) = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)}{3}$

Örnek...4 :

$\forall n > 0, p(n): 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}$

Örnek...5 :

$\forall n > 0, p(n): 1 + r + r^2 + r^3 + \dots + r^{n-1} = \frac{1-r^n}{1-r}$

Örnek...6 :

$\forall n > 0, P(n): 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \dots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$
olduğunu tümevarım yöntemiyle gösteriniz

ALİŞTIRMALAR

1) $t: (\exists x \in \mathbb{N} : x^2 > 1)$ önermesinin deęilini bulunuz

2) $t: (\forall x \in \mathbb{Z} : 4x \neq 0) \Rightarrow (\exists x \in \mathbb{N} : 2x < 3)$ önermesinin karşıt tersi nedir?

n bir doğal sayı olmak üzere, önermelerin doğruluğunu araştırınız. (3-6)

3) $\forall n > 3, p(n): n! > 3^n$

4) $\forall n > 0, p(n): 7^n - 1$ sayısı 2 ile bölünebilir.

5) $\forall n > 0, p(n): n^3 - n$ sayısı 3 ile bölünebilir.

6) $\forall n > 0, 3^n \geq n \cdot 2^n$ olduğunu tümevarım yöntemiyle gösteriniz

7) p : “ a ve b iki tek sayı ise $a.b$ de tek” önermesini doğrudan ispat yöntemiyle ispatlayınız.

8) P : “sonsuz sayıda asal sayı vardır” önermesini çelişki bulma yoluyla ispat ediniz.