

İKİNCİ DERECE DENKLEMLER -2

SANAL BİRİM

SANAL SAYI BİRİMİ

$x+2=0$ denkleminin doğal sayılarda çözümü yoktur. Eğer çözüm kümesi tam sayılar kümesi olarak genişletilirse $\{-2\}$ bu denklemin çözüm kümesidir.

Benzer şekilde $2x+3=0$ denkleminin tam sayılarda çözümü yoktur. Eğer çözüm kümesi Rasyonel Sayılar seçilirse $\{-\frac{3}{2}\}$ bu denklemin çözüm kümesidir.

Reel (gerçek) sayılarda $x^2 + 1 = 0$ biçimindeki çözümü olmayan denklemlerin çözümünü yapabilmek için tanımlanan yeni kümenin adı karmaşık sayılar kümesidir.

$i=\sqrt{-1}$ veya $i^2=-1$ olarak tanımlanır. Reel olmayan sayıların gösterimi mümkün olur. Örneğin $\sqrt{-9}=3i$, $\sqrt{-16}=4i$, $\sqrt{-20}=2\sqrt{5}i$ olarak yazılabilir.

Uyarı

Her a reel sayısı $a+0.i$ olarak yazılabileceğinden aynı zamanda bir karmaşık sayıdır.

KARMAŞIK SAYI

a ve b birer reel sayı ve $i^2=-1$ olmak üzere, $z = a + bi$ şeklinde ifade edilen z sayısına ,karmaşık (kompleks) sayı denir.

Karmaşık sayılar kümesi \mathbb{C} ile temsil edilir.

Başka bir deyişle

$\mathbb{C}=\{z: z=a+bi, a,b \in \mathbb{R} \text{ ve } i^2=-1\}$ dir.

$z = a + bi$ karmaşık sayısında a ya karmaşık sayının reel (gerçek) kısmı, b ye karmaşık sayının imajiner (sanal) kısmı denir ve $Re(z) = a$, $Im(z) = b$ şeklinde gösterilir.

Örnek...1 :

Karmaşık sayıların reel ve sanal kısımlarını yazınız

1) $z=3+8i$

2) $z=4i-2$

3) $z=4i$

4) $z=\sqrt[3]{-5}$

Örnek...2 :

Sayıları sanal birim (i) kullanarak yazınız

1) $z=\sqrt{-4}$

2) $z=\sqrt{-49} + \sqrt[3]{-27}$

3) $z=\sqrt{(-3)^2} + \sqrt[5]{-32}$

SANAL BİRİMİN (i-NİN) KUVVETLERİ

$$i^0=1, i^1=i, i^2=-1, i^3=-i, i^4=1, i^5=i, \dots$$

Buna göre, $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere, i nin kuvveti 4 ile bölündüğünde;

kalan 0 ise $i^n=1$

kalan 1 ise $i^n = i$

kalan 2 ise $i^n = -1$

kalan 3 ise $i^n = -i$

Hatırlatma

(...abc) biçiminde bir sayının 4 ile bölümünden kalan sayı, (bc) iki basamaklı sayısının 4 ile bölümünden kalan sayıyla aynıdır.

Örnek...3 :

Sayıları hesaplayınız

1) i^{10}

2) i^{2345}

3) $i^{4569676}$

4) $i^{459862583}$

İKİNCİ DERECE DENKLEMLER -2

SANAL BİRİM

İKİ KARMAŞIK SAYININ EŞİTLİĞİ

Reel kısımları ve imajiner kısımları kendi aralarında eşit olan iki karmaşık sayı eşittir.

$z=a+ib$, $w=x+iy$ ve $z=w$ ise $a=x$ ve $b=y$ dir

Örnek...4 :

$z_1=a+2+3i-bi$ ve $z_2=2a-b+5i$ karmaşık sayıları için $z_1=z_2$ ise $a.b$ kaçtır?

Örnek...5 :

$x<0<y$ olmak üzere,

$$\sqrt{x-y} + \sqrt[3]{-512} = \sqrt{-16} - x - y$$

eşitliğine göre, (x,y) ikilisini bulunuz?

KARMAŞIK SAYININ EŞLENİĞİ

$z = a + bi$ karmaşık sayı ise $\bar{z} = a - bi$ sayısına z karmaşık sayısının eşleniği denir ve \bar{z} şeklinde gösterilir.

Örnek...6 :

1) $z = 4 + 3i$ sayısının eşleniği $\bar{z} = 4-3i$ dir

2) Karmaşık sayıların eşleniklerini yazınız

$$z=3+9i$$

$$z=4i-7$$

$$z=i$$

$$z = \sqrt{(-5)^2} + \sqrt[3]{-8}$$

KARMAŞIK SAYILARDA DÖRT İŞLEM

1. Toplama – Çıkarma

Karmaşık sayılar toplanırken (yada çıkarılırken) reel ve sanal kısımlar kendi aralarında toplanır (ya da çıkarılır.)

Yani

$z_1=a+ib$ ve $z_2=c+id$ verilsin

$$z_1 + z_2 = (a+c) + i(b+d)$$

$$z_1 - z_2 = (a-c) + i(b-d)$$

olarak tanımlanmıştır.

Örnek...7 :

$z_1=5+7i$ ve $z_2=8-9i$ ise $z_1 + z_2$ ve $z_1 - z_2$ değerlerini bulunuz

Örnek...8 :

i sanal sayı birimi olmak üzere $i+i^2+i^3+\dots+i^{111}$ toplamını bulunuz

2. Çarpma

Çarpma işlemi yapılırken bir karmaşık sayı diğeri üzerine dağıtılır

$z_1=a+ib$ ve $z_2=c+id$ verilsin

$$z_1 \cdot z_2 = (a+ib)(c+id) = ac-bd + i(ad+bc)$$

Örnek...9 :

$z_1=2+5i$ ve $z_2=6-3i$ sayıları için işlemleri yapınız

a) $z_1 \cdot z_2 =$

b) $z_1^2 =$

c) $z_1 \cdot \bar{z}_1 =$

d) $z_2 \cdot \bar{z}_2 =$

Uyarı

$$z \cdot \bar{z} = [\operatorname{Re}(z)]^2 + [\operatorname{Im}(z)]^2$$

Örnek...10 :

$z = x + yi$ olmak üzere $3\bar{z}-1=4-i$ ise $x+y=?$

İKİNCİ DERECE DENKLEMLER -2

SANAL BİRİM

Örnek...11 :

$2.z+i=4i\bar{z}$ eşitliğini sağlayan z karmaşık sayısını bulunuz

Örnek...12 :

$\sqrt{-3} \cdot \sqrt{-36} \cdot \sqrt{(-2)^2} \cdot \sqrt[3]{-64}$ işleminin sonucu kaçtır?

Örnek...13 :

$(1+i)^2=?$

Örnek...14 :

$(1+i)^{100}=?$

Örnek...15 :

$(2+2i)^{69}=?$

Örnek...16 :

$x^2+4=0$ denkleminin karmaşık sayılarda çözüm kümesini bulunuz.

Örnek...17 :

$x^2+2x+6=0$ denkleminin karmaşık sayılarda çözüm kümesini bulunuz?

Örnek...18 :

$x^2+4x+8=0$ denkleminin karmaşık sayılarda çözüm kümesini bulunuz?

Örnek...19 :

$x^2+x+1=0$ denkleminin karmaşık sayılarda çözüm kümesini bulunuz?

Örnek...20 :

a ve c reel sayılar olmak üzere, $x^2 - ax + c = 0$ ikinci dereceden denkleminin köklerinden biri $3 - i$ olduğuna göre, $a + c$ yi bulunuz.

3. Bölme

$z_1=a+ib$ ve $z_2=c+id$ verilsin

$z_1 : z_2 = (a+ib) : (c+id) = \frac{a+ib}{c+id}$ işlemi

yapılırken pay ve payda paydanın eşleniği ile genişletilir

Örnek...21 :

$\frac{8+6i}{1+2i}=?$

Örnek...22 :

$\frac{2+i}{1+3i} + \frac{3i-1}{1-2i}=?$

İKİNCİ DERECE DENKLEMLER -2

SANAL BİRİM

DEĞERLENDİRME

1) $z = 3 + 2i$ olduğuna göre, $\frac{\bar{z}+z}{z-\bar{z}} = ?$

2) $-(1-i)^{78}$

3) $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{100}$

4) $\operatorname{Re}\left(\frac{8i-2}{3-i}\right)$

5) $z(1+2i)-2iz = i\bar{z}+2$ eşitliğini sağlayan z karmaşık sayısını bulunuz

6) $x^2+2x+3=0$ denkleminin karmaşık sayılarda çözüm kümesini bulunuz

7) $x^3+2x^2+3x+px=0$ denkleminin iki karmaşık bir reel kökü varsa p nasıl seçilmelidir?

8) a ve c reel sayılar olmak üzere, $mx^3 + x + n = 0$ ikinci dereceden denkleminin köklerinden biri $1 - i$ olduğuna göre, $m-n$ yi bulunuz.

9) $3 - 7i$ karmaşık sayısının çarpma işlemine göre tersinin imajiner (sanal) kısmını bulunuz